Radiazione e Relativita’ Ristretta

IV – Massa, energia, impulso nella dinamica relativistica

Leggi di Newton, leggi di conservazione

Leggi di Newton: principi generali della dinamica, la cui validita' e' basata sull'esperienza. Da esse: leggi conservazione

Per un sistema di punti materiali:

Quantita' di moto

$$\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \mathrm{cost}$$

Momento angolare

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{l}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \mathrm{cost}$$

Energia

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2 + V_i \right) = \mathrm{cost}$$

Possibile seguire il percorso inverso:

Principi di invarianza

Leggi di conservazione

Leggi di Newton

Principi di invarianza

Legame fra principi di invarianza e leggi di conservazione:

*Invarianza per traslazioni → conservazione **quantita' di moto***
*Invarianza per rotazioni → conservazione **momento angolare***
*Invarianza per traslazione temporale → conservazione **energia***
NB: Conservazione della massa? Nessuna proprieta' di invarianza…

Vista la loro origine, si possono assumere come valide per un sistema isolato (e conservativo), sia che restiamo nell'ambito pre-relativistico, sia che ci poniamo nel quadro della RR.
Ora: se le TdG vengono sostituite dalle TdL, le leggi di Newton devono cambiare.
Per cambiarle:
*Assumiamo valide le leggi di conservazione, e cerchiamo una nuova definizione di **p** ed E*

Processi di collisione - I

Caso piu' immediato di applicazione delle leggi di conservazione:

Collisione di due masse uguali

Confronto fra trattazione galileiana/newtoniana e TdL

Ipotesi non sempre esplicitamente ricordata: *la massa e' una costante di ogni corpo, indipendente dal SRI in cui viene misurata*.

Questa ipotesi e' in contrasto con le TdL, se vogliamo che la quantita' di moto sia conservata.

Processi di collisione - II

Supponiamo che la massa *possa* dipendere dalla velocita', poi verificheremo se l'ipotesi e' superflua o no.

Esperimenti ideali (Einstein 1905, Lewis e Tolman 1909, Von Laue…): collisione completamente anelastica

Descrizione galileiana/newtoniana

Ipotesi: *m=m'*, massa indipendente dal SRI in cui e' osservata

Nel SRI *S*, del centro di massa

$$u_1 = u, \quad u_2 = -u$$

$$mu + m(-u) = 0 = Mu' = (m+m)u' \to u' = 0 \qquad \text{impulso conservato}$$

$$\text{NB:} \quad \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mu^2 \neq \frac{1}{2}(2m)u'^2 = 0 \qquad \text{en. cinetica } \textit{non} \text{ conservata}$$

Nel SRI *S'*, di quiete di *2* (*S'* ha velocita' *v=-u* rispetto a *S*)

$$\begin{cases} u_1 \to \bar{u}_1 = \bar{u}_1 - \mathrm{v} = u - (-u) = 2u, u_2 \to \bar{u}_2 = u_2 - \mathrm{v} = -u - (-u) = 0 & \text{TdG} \\ u' \to \bar{u}' = u' - \mathrm{v} = 0 - (-u) = u & \text{TdG} \end{cases}$$

$$\to m\bar{u}_1 + 0 = m2u, M\bar{u}' = 2mu \to m\bar{u}_1 + 0 = M\bar{u}' \qquad \text{OK impulso conservato}$$

Processi di collisione - III

Trattazione relativistica

Nel SRI del centro di massa, ancora:

$$\begin{cases} u_1 = u, \quad u_2 = -u \\ u' = 0 \end{cases}$$

Quindi la quantita' di moto definita classicamente e' ancora conservata in *S*

Ma nel SRI di quiete di 2, se usiamo la legge relativistica di trasformazione delle velocita':

$$u_1 \rightarrow \bar{u}_1 = \frac{u_1 - \mathrm{v}}{1 - u_1 \mathrm{v}/c^2} = \frac{u+u}{1 + uu/c^2} = \frac{2u}{1+u^2/c^2}, \qquad u_2 \rightarrow \bar{u}_2 = \frac{u_2 - \mathrm{v}}{1 - u_2 \mathrm{v}/c^2} = \frac{-u+u}{1-(-u)u/c^2} = 0$$

$$u' \rightarrow \bar{u}' = \frac{u' - \mathrm{v}}{1 - u' \mathrm{v}/c^2} = \frac{0-(-u)}{1 - 0 \cdot \mathrm{v}/c^2} = u$$

Se continuiamo ad assumere che la massa sia indipendente dal SRI, la quantita' di moto *non e' conservata in S':*

$$2mu \neq \frac{2mu}{1+u^2/c^2}$$

Processi di collisione - IV

Cosa pensiamo si debba continuare a conservare?

Massa: buona evidenza sperimentale (~10^{-6} nelle reazioni chimiche), **non conseguente ad alcuna proprieta' di invarianza che sia evidente**

Impulso: buona evidenza sperimentale, **conseguenza di una evidente proprieta' di invarianza**

Essendo forzato ad abbandonare una delle leggi di conservazione, Einstein abbandona la prima, per la quale non c'e' ragione di sussistere a priori

Quindi: *massa dipendente dal SRI usato*

Ri-definizione della massa

Supponiamo che la massa dipenda dalla velocita': allora possiamo ancora conservarla, in senso relativistico, insieme all'impulso

$$\begin{cases} M = m(u') + m(0) \\ Mu = m(u')u' \\ u' = \dfrac{2u}{1+u^2/c^2} \end{cases} \rightarrow u = u'\frac{m(u')}{m(u')+m(0)} \rightarrow m(u) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Distinzione fra *massa a riposo m(0)* e *massa relativistica m(u)*

[Tuttavia, come si vedra' il concetto di massa relativistica e' superfluo, e anzi nell'insieme fuorviante]

Attenzione: nel fare queste considerazioni, il concetto di massa come misura della 'quantita' della materia' e' da considerarsi del tutto perduto (situazione che gia' si presenta nella meccanica newtoniana: massa come inerzia)

Ri-definizione dell'impulso

Come ridefinire l'impulso alla luce della nuova definizione di massa?
Come nella vecchia definizione, con la nuova massa:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m(0)}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\boldsymbol{v} \equiv \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$

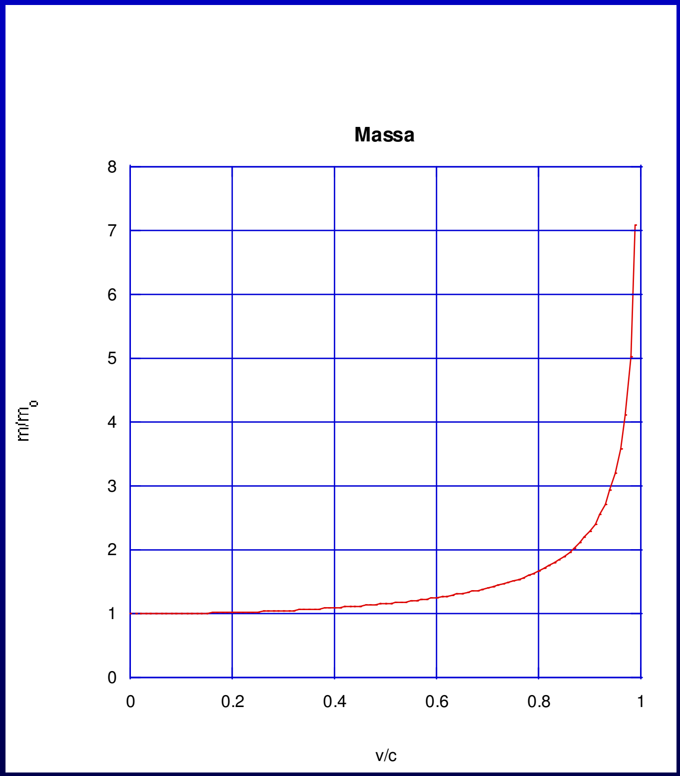
Come visto prima, con questa ri-definizione l'impulso si conserva nelle collisioni (e, in realta', in tutti i processi), in tutti i SRI, in accordo con il principio di relativita'.

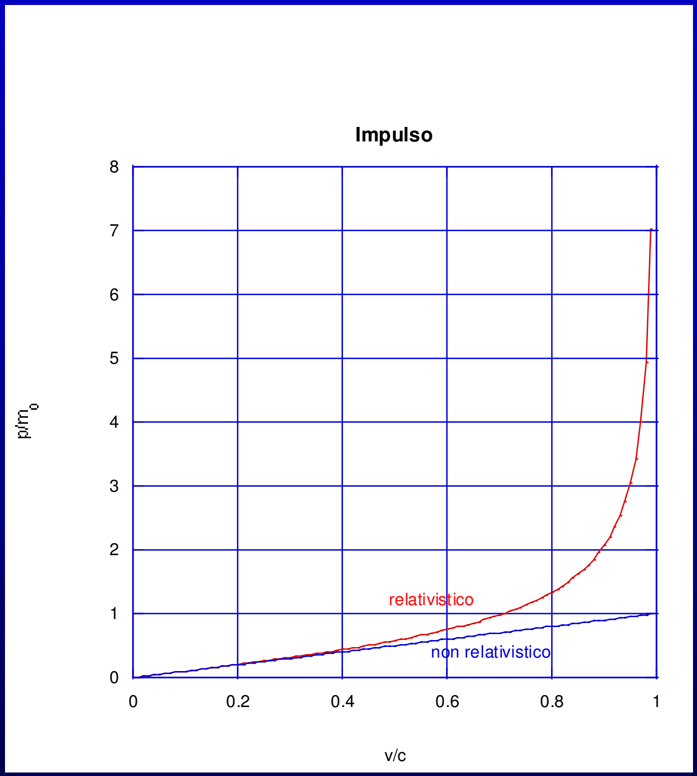
Altro modo di scriverlo:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m_0\boldsymbol{\beta}c}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0\gamma\boldsymbol{\beta}c \xrightarrow[\beta\to 0]{} m_0\boldsymbol{v}$$

che mostra come per piccole velocita' si torni alla definizione pre-relativistica

Andamento con β





Notare la divergenza per $\beta\rightarrow 1$: una particella con velocita' uguale a quella della luce avrebbe massa e quantita' di moto infinite

Ridefinizione dell'energia - I

Relazione classica fra energia cinetica e impulso:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

$$E = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Qualche conticino sull'impulso relativistico:

$$p^2 = m_0^2 c^2 \beta^2 \gamma^2$$

$$\beta^2\gamma^2 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \rightarrow \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1 \rightarrow \beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$$

$$\rightarrow p^2 = m_0^2 c^2 \left(\gamma^2 - 1\right) \rightarrow m_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 \gamma^2 - p^2 \rightarrow m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2$$

Questa e' una quantita' invariante; questo e' l'impulso relativistico (al quadrato); che cosa e' questo??

Ridefinizione dell’energia - II

Per capirlo, ricordiamo prima di tutto che la quantita’ $m_0\gamma$ ha il significato di massa relativistica.

Sviluppiamo in serie:

$$m_0c^2\gamma = m_0c^2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{\beta\ll 1}{\approx} \frac{m_0c^2}{1-\beta^2/2} \underset{\beta\ll 1}{\approx} m_0c^2\left(1+\beta^2/2\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0\mathrm{v}^2$$

Sorpresa! Nel limite di basse velocita’, il termine misterioso si rivela (in parte) del tutto familiare: il secondo pezzo dello sviluppo in serie, infatti, non e’ altro che l’energia cinetica classica del corpo in movimento.

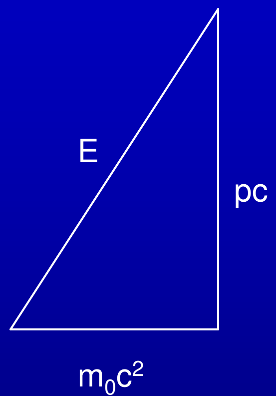
Possiamo allora definire il termine misterioso come *l’energia totale relativistica* del corpo di massa a riposo m_0:

$$E^2 \equiv m_0^2c^4\gamma^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$$

Energia, impulso relativistici -I

Relazione fra i due (di tipo ‘pitagorico’:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$



Riarrangiando:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Poiche’ questa e’ una costante, questa e’ una quantita’ *invariante* (ossia, ha lo stesso valore in tutti i SRI):

$$E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

quindi viene lasciata invariata da ogni TdL.

Energia, impulso relativistici -II

Situazione simile a quella incontrata per le TdL delle coordinate di un evento:
la quantita'

$$\Delta s^2 = \left[\Delta(ct)\right]^2 - (\Delta \boldsymbol{r})^2$$

e' lasciata invariata da ogni TdL.

Allora, le quantita' *E* e ***p*** si trasformeranno da un SRI ad un altro con le stesse TdL:

$$p_x' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(p_x - \frac{\mathrm{v}E}{c^2}\right) \qquad p_x = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(p_x' + \frac{\mathrm{v}E'}{c^2}\right)$$

$$p_y' = p_y \qquad p_y = p_y'$$

$$p_z' = p_z \qquad p_z = p_z'$$

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(E - \mathrm{v}p_x/c\right) \qquad E = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(E' + \mathrm{v}p_x'\right)$$

Collisioni anelastiche - I

Consideriamo la solita collisione anelastica fra le particelle 1 e 2, di uguale massa a riposo m_0, che 'restano attaccate' a formare una terza particella 3.
Nel SRI del centro di massa

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0$$

mentre in ogni altro SRI:

$$\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = \boldsymbol{p}_3'$$

Usiamo le TdL per mettere in relazione i due insiemi di componenti:

$$\begin{cases} p_{x1}' + p_{x2}' = \gamma \underbrace{\left(p_{x1} + p_{x2}\right)}_{=0} - \dfrac{\beta\gamma}{c}\left(E_1 + E_2\right) \\ p_{x3}' = \gamma \underbrace{p_{x3}}_{=0} - \dfrac{\beta\gamma}{c} E_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow E_3 = E_1 + E_2$$

Collisioni anelastiche - II

Dalla definizione di energia totale relativistica, nel SRI *S*:

$$\begin{cases} E_3 = m_{03}c^2 \\ E_1 = E_2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\mathrm{v}/c\right)^2}} \end{cases} \rightarrow m_{03}c^2 = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\mathrm{v}/c\right)^2}}$$

$$\rightarrow m_{03}c^2 > 2m_0c^2 \;!!$$

La massa a riposo di 3 e' maggiore della somma delle masse a riposo di 1 e 2 !! L'energia cinetica di 1 e 2 e' stata convertita in contributo alla massa a riposo di 3.

Quindi e' possibile convertire en. cinetica in massa

$$\Delta E = \Delta m c^2$$