

Radiazione e Relativita' Ristretta

V –Qualche applicazione

Massa, impulso ed energia - I

Qualche osservazione generale

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

Relazione fra impulso, massa a riposo, en. cinetica:

Se il termine cinetico e' piccolo rispetto a quello di massa:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \sim mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} \right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Quindi: *termine di energia a riposo + termine classico*

Se il termine cinetico e' dominante:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = pc \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}} \sim pc \left(1 + \frac{m^2 c^2}{2p^2} \right) \approx pc$$

Quindi: *Energia \propto Impulso*

Perche' non c'e' il termine a riposo nella meccanica classica?

Conservazione della massa: in ogni processo, le masse dei corpi si conservano.

I corpi non perdono la loro identita' nei processi. Assegnare un contributo 'a riposo' all'en. totale di un corpo non modificherebbe le regole che governano i processi

Massa, impulso ed energia - II

5. Particelle a massa nulla:

$$m = 0 \rightarrow E = pc$$

Esempi: fotone, neutrino, che si muovono con *velocità* = c in ogni SRI

Per esse: en. totale = en. cinetica

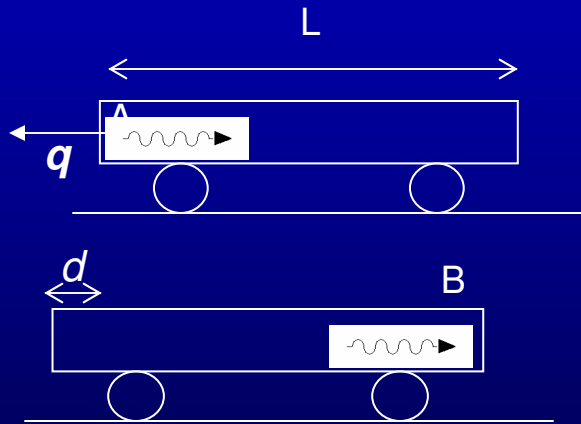
La distinzione fra termine cinetico e termine a riposo ha senso, perché quest'ultimo è un termine uguale in tutti i SRI per ogni corpo. Nondimeno, in un processo qualsiasi (v. collisioni) ciò che si conserva strettamente è l'en. totale in senso relativistico, e non i singoli contributi: questa è la differenza essenziale rispetto alla meccanica pre-relativistica

L'altro aspetto del tutto nuovo è l'attribuzione di *inerzia* (ossia, di un contributo alla caratteristica che determina la dinamica di un sistema fisico) ad ogni forma di energia: pre-relativisticamente, questa era una proprietà delle sole masse.

L'argomento di Einstein

L'inerzia dell'energia e' uno dei concetti originali della RR.

Fu introdotto originariamente da Einstein con il seguente `esperimento concettuale':



Scatola chiusa, ferma; usa sorgente A emette un impulso luminoso, di durata $t \ll L/c$ ed energia E . La quantita' di moto associata e' $q=E/c$, che viene compensata da una quantita' di moto uguale e opposta acquistata dal carrello. Dopo un tempo $T=L/c$, l'impulso luminoso viene assorbito all'estremita' B , e il carrello si ferma, dopo aver percorso la distanza $d=qL/Mc$, in cui M e' la massa del carrello.

Il centro di massa del sistema, che e' chiuso, non deve pero' muoversi, naturalmente: quindi occorre attribuire alla radiazione emessa e assorbita una massa m tale da soddisfare:

$$mL - Md = 0 \rightarrow m = M \frac{d}{L} = M \frac{qL}{McL} = \frac{E}{c^2}$$

Equivalenza massa-energia - I

Significato di $\Delta E = \Delta mc^2$

Esempio visto prima: due corpi uguali, di massa m , collidono con urto completamente anelastico, formando un terzo corpo di massa M

Nel SRI del centro di massa:

$$\begin{cases} v_M = 0 \\ M = 2\gamma m \end{cases} \rightarrow M > 2m$$

Descrizione pre-relativistica:

L'en. cinetica dissipata si converte in calore; il terzo corpo ha massa $M=2m$

Descrizione relativistica:

Come sopra, ma $M > 2m$

Dal punto di vista di una forza esterna che agisce su M , l'effetto e' diverso nei due casi!

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia

Equivalenza massa-energia - II

Esempi:

1. Urto anelastico fra due sfere con $m = 1 \text{ g}$, $v = 10^5 \text{ cm s}^{-1}$

$$\Delta M = 2 \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\Delta E} \frac{1}{c^2} = m \frac{v^2}{c^2} = m \beta^2 = +10^{-3} \frac{10^{10}}{9 \cdot 10^{20}} \simeq +10^{-3} 10^{-11}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta M}{2m} = \frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} 10^{-11} \sim +10^{-11}$$

Particelle libere: $E_{tot} = E_{cin} > 0$

Particelle legate: $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}$; forza attrattiva $\rightarrow E_{pot} < 0 \rightarrow E_{tot} < E_{cin}$

$E_L = E_{tot} - E_{cin} < 0$

Incremento in massa non misurabile

2. Formazione atomo di H , da protone ed elettrone inizialmente fermi a distanza infinita:

$$M_H = 1.67338 \cdot 10^{-24} \text{ g} = m_p + m_e + \frac{1}{c^2} \underbrace{E_L}_{\text{En. di legame } < 0} = m_p + m_e - \frac{1}{c^2} 13.6 \text{ eV}$$

$$\Delta m = \frac{E_L}{c^2} = -\frac{13.6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{9 \cdot 10^{20}} \simeq -2.4 \cdot 10^{-32} \text{ g} \rightarrow \frac{\Delta m}{M_H} \simeq -\frac{2.4 \cdot 10^{-32}}{1.67338 \cdot 10^{-24}} \approx -1.4 \cdot 10^{-8}$$

Decremento in massa difficile da misurare (possibile oggi?)

Equivalenza massa-energia - III

3. Formazione nucleo di deuterio, da protone e neutrone inizialmente fermi e separati:

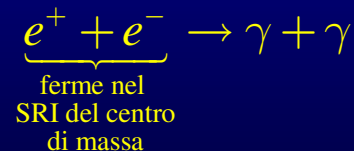
$$M_D = 3.34334 \cdot 10^{-24} \text{ g} = m_p + m_n + \underbrace{E_L}_{\text{En. di legame } < 0} = m_p + m_n - 2.226 \text{ MeV}$$

$$\Delta m = \frac{E_L}{c^2} = -\frac{2.226 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{9 \cdot 10^{20}} \simeq -0.396 \cdot 10^{-26} \text{ g} \rightarrow \frac{\Delta m}{M_D} \simeq -\frac{0.396 \cdot 10^{-26}}{3.34334 \cdot 10^{-24}} \approx -1.19 \cdot 10^{-3}$$

Decremento in massa facile da misurare !

4. Conversione totale di massa in energia: annichilazione elettrone-positrone in 2 fotoni

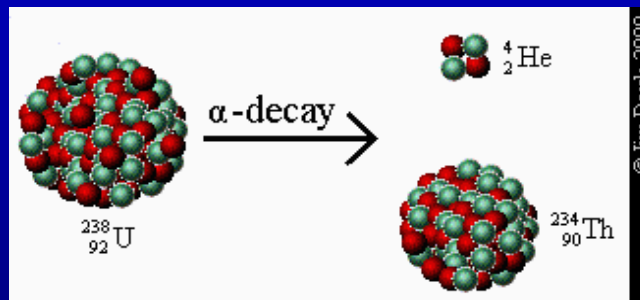
Processo comune fra particelle elementari: annichilazione particella-antiparticella, a riposo



Elettrone e positrone scompaiono; i due fotoni escono “schiena a schiena”, portando via ciascuno l’energia (solo cinetica, visto che $m_\gamma=0...$) $E_\gamma=m_e c^2$

Equivalenza massa-energia - IV

5. Conversione *parziale* di massa a riposo in energia cinetica.
Es. decadimento α del nucleo di U^{238} :



Processo *spontaneo*, esotermico

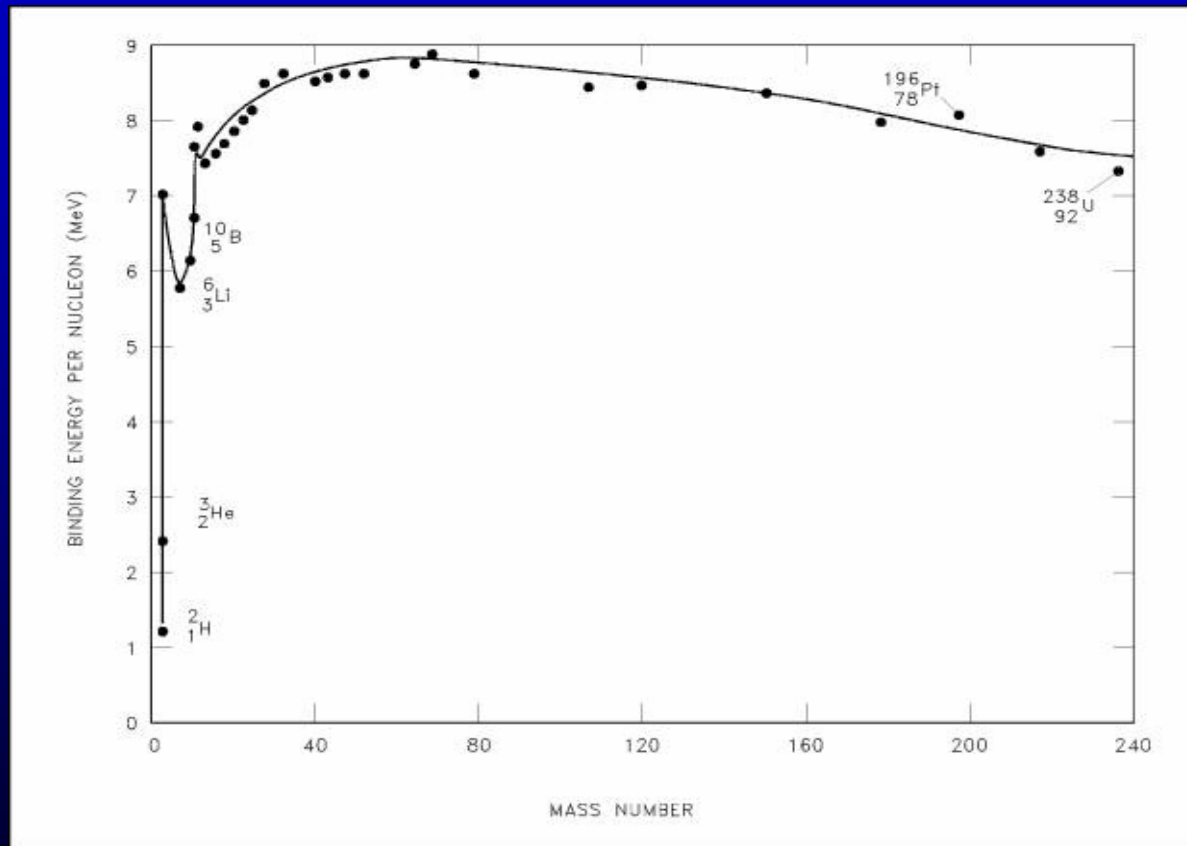
En. cinetica dei nuclei figli = 4.3 MeV

Decremento in massa a riposo:

$$\Delta M = M_{U^{238}} - m_{Th^{234}} - m_{\alpha} = \frac{4.3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{20}} g = 0.48 \cdot 10^{-33} g$$

Equivalenza massa-energia - V

Energia di legame per nucleone vs. numero di massa A del nucleo



Energia da fissione nucleare

Trasformare massa a riposo in en. cinetica (e quindi in calore utilizzabile) e' possibile sfruttando le diverse energie di legame nei nuclei pesanti e in quelli medio-leggeri.

Questi ultimi sono un po' piu' legati dei primi, quindi la massa di un nucleo pesante che possa fissionare (= scindersi, spontaneamente o quasi) in due nuclei leggeri e' maggiore della somma delle masse dei prodotti della fissione. La differenza si ritrova come en. cinetica dei prodotti stessi, che puo' essere usata per scaldare un assorbitore (o per produrre un'esplosione su larga scala).

Il processo avviene a temperatura ambiente, e puo', una volta innescato, procedere autonomamente, purché siano verificate alcune condizioni (presenza di nuclei fissionabili per urto da neutroni di energie 'termiche', emissione di neutroni liberi nella fissione, probabilita' alta di urto neutrone-nucleo, presenza di un sistema di termalizzazione dei neutroni emessi...)

La fusione

Se si osserva il grafico dell'en. di legame/A vs. A si vede facilmente che anche i nuclei piu' leggeri sono meno legati di quelli medio-leggeri (con un po' di altalena all'inizio...). Questo porta a pensare che sia possibile ottenere energia anche dal processo inverso a quello di fissione, ossia dalla fusione nucleare.

Nelle giuste condizioni, due nuclei leggeri possono fondersi in uno piu' pesante, con rilascio di energia cinetica se la somma delle masse dei prodotti e' minore di quella delle masse dei reagenti.

Il processo e' interessante per la produzione di energia, perche':

non richiede nuclei pesanti e fissionabili, come l'uranio, relativamente rari, costosi e pericolosi da maneggiare, ma elementi comuni e innocui come l'idrogeno o il deuterio non porta a produrre nuclei instabili, che sono sorgenti di radiazioni, in misura apprezzabile

Ma: fra le condizioni richieste, c'e' quella di una *temperatura elevatissima* (le reazioni di fusione avvengono fra nuclei carichi positivamente: l'en. cinetica dei reagenti deve essere elevata perche' si possa superare la repulsione coulombiana), problema tecnologicamente molto complesso e non ancora realmente risolto

Le reazioni termonucleari stellari

Da dove viene l'energia delle stelle?

Da processi termonucleari come quelli descritti; le temperature elevate sono fornite dall'attrazione gravitazionale che tende a comprimere il plasma e a scaldarlo.

I primi cicli che corrispondono agli stadi successivi dell'evoluzione stellare, sono i seguenti:

Ciclo dell'idrogeno

$p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$.42 MeV
$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$	1.02 MeV
${}^2\text{H} + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	5.49 MeV
${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + p + p$	12.86 MeV
total	26.72 MeV

Ciclo dell'elio

${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	1.59 MeV
${}^7\text{Be} + p \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$	13 MeV
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu$	10.78 MeV
${}^8\text{Be} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$.095 MeV
total	12.595 MeV

Dopo quello dell'elio ci sono alcuni altri cicli, fino a produrre nuclei di Fe. La fusione del Fe e' un processo endotermico, quindi l'evoluzione stellare si arresta (esaurimento combustibile..). Possibili finali (a seconda della massa):

Nana bianca, oppure Supernova, che si spegne in una stella di neutroni o in un buco nero