# Campi conservativi

Consideriamo un campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:
Quando e' un campo conservativo, e quindi ammette potenziale?

Consideriamo l'elemento di integrale di linea di $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ lungo due diversi percorsi infinitesimi fra gli estremi $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$, e per semplicita' scegliamo di muoverci nel piano $xy$

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}},\ d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}$$

$a$) I percorso: prima $dx$, poi $dy$

$$\rightarrow dW = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = A_x(x,y,z)dx + A_y(x+dx,y,z)dy$$

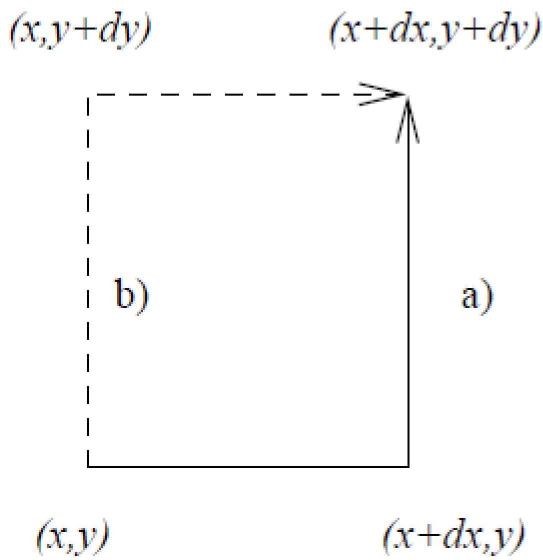
Sviluppo in serie di Taylor:

$$\rightarrow dW_a \simeq A_x(x,y,z)dx + A_y(x,y,z)dy + \frac{\partial A_y}{\partial x}(x,y,z)dydx$$

$b$) II percorso: prima $dy$, poi $dx$

$$\rightarrow dW = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = A_x(x,y+dy,z)dx + A_y(x,y,z)dy$$

$$\rightarrow dW_b \simeq A_x(x,y,z)dx + A_y(x,y,z)dy + \frac{\partial A_x}{\partial y}(x,y,z)dydx$$




Se A e' conservativo:

$$dW_a = dW_b \rightarrow dW_a - dW_b = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial A_y}{\partial x}(x, y, z)\,dydx - \frac{\partial A_x}{\partial y}(x, y, z)\,dydx = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0}$$

*etc* per le altre coppie di componenti

Tecnicamente, un campo vettoriale le cui componenti soddisfino queste condizioni e' detto *irrotazionale* (= conservativo)

Si dimostra che, sotto ipotesi piuttosto generali sulla regione di spazio in cui $\mathbf{A}$ e' definito, sono condizioni necessarie e sufficienti