

Collisioni: approssimazioni e schematizzazioni

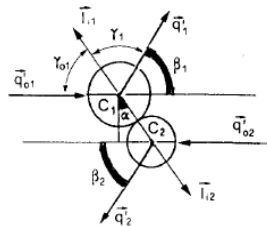
Le approssimazioni e schematizzazioni che vengono usate per la descrizione dei processi d'urto non sono sempre del tutto intuitive. In questa nota si tenta di chiarire alcuni punti, nel tentativo di aiutare a inquadrare meglio la questione.

1) Forze a corto range: Urti in 1D

a) Si assume che le dimensioni fisiche del corpo considerato siano trascurabili; come conseguenza, viene trascurato anche il suo moto 'interno' di rotazione.

b) Nel limite di punti materiali, le forze a corto range diventano a 'zero range', stante l'assenza di scale proprie di lunghezza

c) Come conseguenza della mancanza di dimensioni finite per i punti materiali, nel caso di forze a zero range nel CM non ci sono effetti trasversali durante la collisione: la variazione della quantità di moto può solo avvenire longitudinalmente. Si può capire questa affermazione prendendo in considerazione l'urto fra sfere rigide a dimensione finita: in assenza di forze tangenziali, la forza di contatto che agisce durante l'urto in questo caso è diretta lungo la congiungente i due centri. Poiché la forza si suppone essere di contatto, nel riferimento del CM quella che è rilevante è la direzione della retta congiungente i due centri, rispetto a quella della velocità relativa, al momento del contatto, determinata dall'angolo α nella figura.



Nel limite di sfere di raggio nullo l'unica possibilità di collisione si verifica quando la congiungente i due centri coincide con la traiettoria dei due punti nel CM. Quindi, a rigore, nel riferimento del CM per le collisioni fra punti materiali mediate da forze di contatto l'unico urto possibile è quello 'testa a testa'

d) L'urto fra due punti materiali, nel limite sopra descritto, ha dunque una proprietà particolarmente semplice nel riferimento del CM: si tratta sempre di una collisione *collineare*, ossia in 1D. Si osservi che la proprietà di *collinearità* è aggiuntiva a quella, più familiare, dell'*antiparallelismo* fra le quantità di moto/velocità dei due punti, prima e dopo la collisione, conseguenza della conservazione della quantità di moto: di fatto, quest'ultima riguarda l'*orientamento* dei rispettivi vettori, mentre la prima aggiunge la *sovrapponibilità* spaziale delle traiettorie, che giacciono quindi lungo la stessa retta. In un altro riferimento inerziale, il valore delle velocità/quantità di moto iniziali/finali si ottiene con una trasformazione di Galilei, in cui tutte le velocità vengono addizionate della velocità del CM nel riferimento scelto:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^* + \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1^{*'} + \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^* + \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2^{*'} + \mathbf{v}_0$$

$$\rightarrow \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^* \times \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_2^* = (\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*) \times \mathbf{v}_0$$

$$\rightarrow \mathbf{v}_1' \times \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1^{*'} \times \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_2^{*'} = (\mathbf{v}_1^{*'} - \mathbf{v}_2^{*'}) \times \mathbf{v}_0$$

Vettori velocità collineari nel CM: $\hat{n}$ versore della direzione

$$\mathbf{v}_1^* = \alpha \hat{n}, \mathbf{v}_2^* = \beta \hat{n}, \mathbf{v}_1^{*'} = \gamma \hat{n}, \mathbf{v}_2^{*'} = \delta \hat{n}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^* = (\alpha - \beta) \hat{n} \\ \mathbf{v}_1^{*'} - \mathbf{v}_2^{*'} = (\gamma - \delta) \hat{n} \end{cases}$$

$$\rightarrow (\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*) \parallel (\mathbf{v}_1^{*'} - \mathbf{v}_2^{*'}) \rightarrow (\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*) \times \mathbf{v}_0 \parallel (\mathbf{v}_1^{*'} - \mathbf{v}_2^{*'}) \times \mathbf{v}_0$$

$$\rightarrow \mathbf{v}_1' \times \mathbf{v}_2' \parallel \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

Π = piano definito dalle vel. iniziali

Π' = piano definito dalle vel. finali

$$\rightarrow \text{Normale a } \Pi \parallel \text{Normale a } \Pi'$$

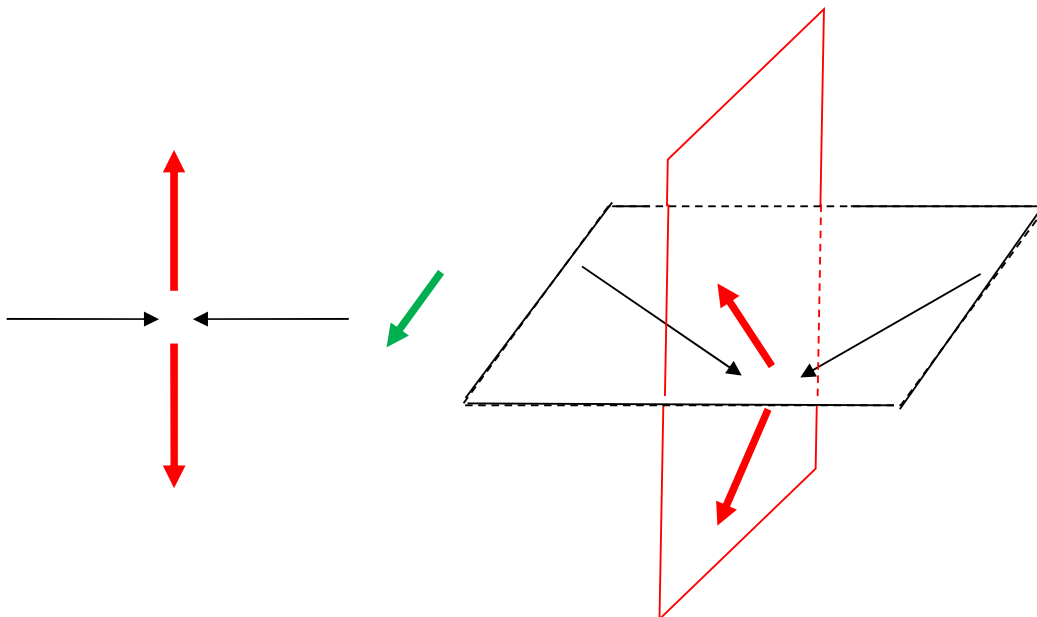
Quindi l'urto risulta *piano* in tutti i riferimenti inerziali.

2) Forze a corto range: Urti in 2D

Alla luce delle conclusioni appena raggiunte, puo' lasciare qualche dubbio il caso, ampiamente trattato in molti esempi ed esercizi, dell'urto fra due punti materiali nel quale, nel riferimento del CM, c'e' una variazione della direzione finale rispetto a quella iniziale. Questo caso puo' essere considerato analogo all'urto fra due sfere rigide, come descritto sopra, nel quale non si tiene conto dei gradi di liberta' interni (rotazione) delle sfere. In questo caso avremo semplicemente una relazione fra il parametro d'urto e l'angolo di deflessione: tale angolo infatti dipende, come e' abbastanza intuitivo, dal parametro d'urto oltre che dai raggi delle due sfere

$$\cos \alpha = \frac{b}{R_1 + R_2}$$

Di fatto, questa approssimazione equivale a considerare una forza a corto range che ha una dipendenza angolare. Nel limite di range zero, la collisione nel CM risulta contenuta in un piano come conseguenza della conservazione della quantita' di moto: le traiettorie entranti essendo collineari nel CM, definiscono un piano insieme a quelle uscenti, collineari anch'esse e intersecanti quelle entranti. Si osservi che viceversa l'urto bidimensionale nel CM, anche nel caso considerato di interazione a corto raggio d'azione, non e' in generale piano in un riferimento qualsiasi. Questo si puo' vedere nel modo piu' semplice considerando il caso di una collisione elastica piana con deflessione di 90 gradi nel CM; quando si osservi lo stesso processo da un riferimento in cui il CM si muove con la velocita' $\mathbf{v}_{CM}$ (freccia verde), la collisione non e' evidentemente contenuta in un piano

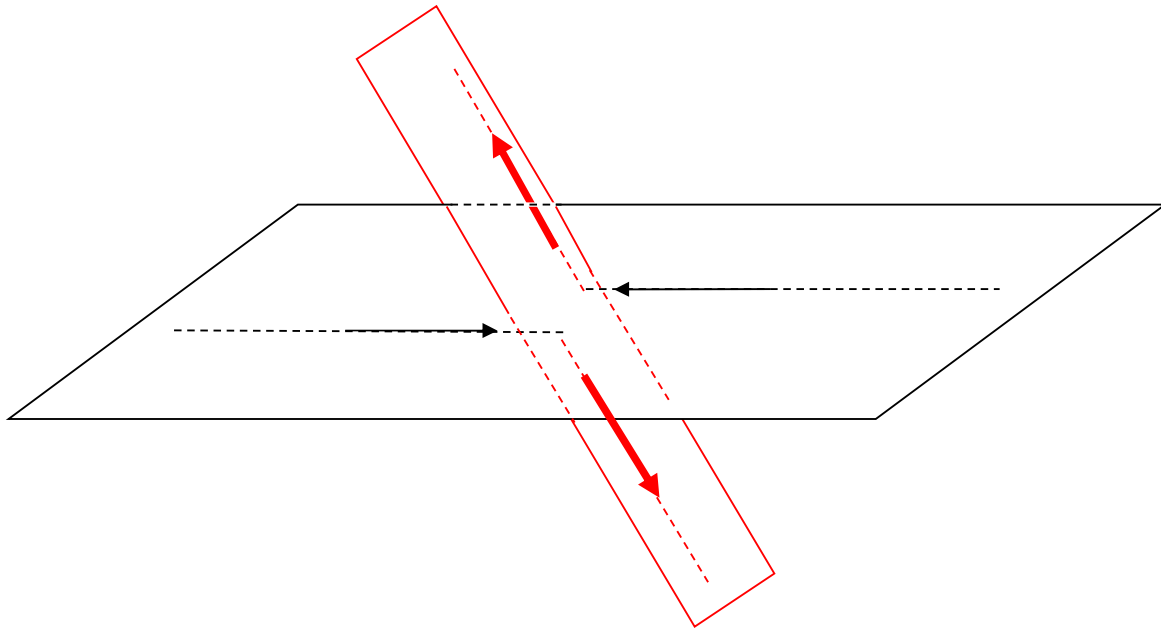


3) Conservazione del momento angolare

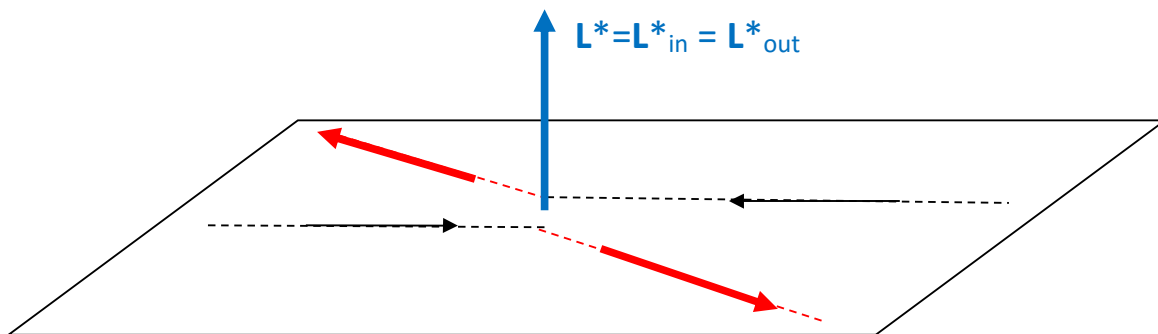
In tutti i casi fin qui considerati, la conservazione del momento angolare totale non aggiunge informazioni a quelle ottenute dalla conservazione della quantità di moto (e dell'energia cinetica, se l'urto è elastico): questa è una conseguenza del limite di interazione puntiforme che è stato considerato, nel quale il momento angolare totale nel riferimento del CM $\mathbf{L}^*$ è nullo. Come risultato, il momento angolare totale in un riferimento qualsiasi coincide con quello $\mathbf{L}_{CM}$ dovuto al moto del CM (rettilineo e uniforme), che è conservato ma non dà informazioni sulla dinamica della collisione: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM}$ perché non c'è contributo da $\mathbf{L}^*$, e la sua conservazione non dà informazioni sull'orientamento dei piani iniziale e finale della collisione, che in un riferimento generico non è necessariamente lo stesso.

4) Forze a lungo raggio d'azione

Volendo allargare la definizione di processo d'urto a un gran numero di casi concreti, viene naturale prendere in considerazione, oltre ai casi più intuitivi di forze a corto range, o 'di contatto', (per esempio quelle – di solito di natura elastica – che intervengono nell'urto fra oggetti rigidi, come due palle da biliardo), anche quello di 'forze a distanza', o a lungo range (per esempio quella attrattiva gravitazionale nell' 'urto' fra una cometa e il Sole, o quella repulsiva elettrostatica fra particella α e nucleo, nello scattering di Rutherford): questo è utile perché in entrambi i casi valgono le stesse leggi di conservazione. In presenza di azioni a distanza, come anche nel caso di contatto fra oggetti con dimensione finita, le condizioni perché si verifichi l'urto nel CM non richiedono necessariamente la collinearità fra le traiettorie dei due punti materiali; in generale le traiettorie risultano semplicemente parallele, come al solito in conseguenza alla definizione del CM come riferimento nel quale la quantità di moto totale è nulla: nel caso generale quindi c'è un momento angolare $\neq 0$ nel CM. Questo porta a una differenza rispetto al caso limite, considerato prima, di forze a range zero: mentre per quelle la collisione risultava piana nel CM, nel caso presente in generale la conservazione della quantità di moto non consente di concludere che la collisione è piana nel CM. In questo caso, infatti, il piano che contiene le traiettorie entranti non è necessariamente lo stesso che contiene quelle uscenti dalla collisione, pur venendo conservata la quantità di moto totale.



Nel caso di forze centrali, tuttavia, il mom. angolare e' conservato : il piano definito dalle traiettorie parallele dello stato iniziale, che risulta ortogonale al vettore momento angolare nel CM, contiene anche le traiettorie parallele dello stato finale: quindi l'urto risulta piano nel CM.



Nota Esempi quasi-realistici di forze non centrali si possono trovare in varie situazioni, per esempio quando si considerino effetti magnetici fra particelle cariche in movimento. E' bene sottolineare pero' che in casi come questi la non conservazione del mom. angolare e' solo apparente, in quanto viene trascurata la componente del mom. angolare totale contenuta nel campo elettromagnetico, sia statico sia irraggiato durante la collisione. La conservazione del mom. angolare totale per un sistema isolato, al pari di quelle della quantita' di moto e dell'energia, e' assunta essere sempre valida, perche' deriva da principi fondamentali di simmetria ben verificati e

indipendenti dalle leggi di Newton: l'apparente violazione di una di queste tre leggi di conservazione indica di fatto una incompletezza nella descrizione del sistema stesso.