Collisioni e leggi di conservazione

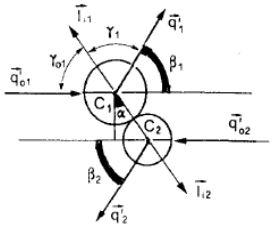
Nello studio dei processi d'urto si fa ampio uso delle leggi di conservazione della dinamica dei sistemi: per un sistema isolato esse sono quantita' di moto, momento angolare, energia (urti elastici), moto del centro di massa. Non sempre pero' risulta completamente chiaro quale sia il modello fisico della collisione che viene usato per applicarle: scopo di questa nota e' cercare di chiarire le diverse approssimazioni che vengono introdotte di volta in volta.

1) Punti materiali e forze di contatto: 1D, 2D e 3D

Il modello piu' semplice di collisione e' quello fra oggetti di cui si trascurano le dimensioni, interagenti tramite forze di contatto. Si assume cioe' che le dimensioni del corpo considerato siano trascurabili; come conseguenza, viene trascurato anche il suo eventuale moto 'proprio' di rotazione. Nel limite di punti materiali, le forze di contatto, che per loro natura sono nella realta' a 'corto range', diventano a 'zero range', stante l'assenza di scale proprie di lunghezza: l'interazione di contatto avviene solo se i due punti materiali occupano, a qualche istante, la stessa posizione. Come prima conseguenza di questa ipotesi, le leggi di conservazione della quantita' di moto e dell'energia cinetica, se l'urto e' elastico, sono sufficienti a dare la massima informazione sulla collisione: la conservazione del momento angolare e' banalmente verificata essendo $\boldsymbol{L} = 0$ prima e dopo l'urto, e non aggiunge informazioni indipendenti. Come altra conseguenza, la collisione avviene se le traiettorie iniziali dei due punti materiali costituiscono una coppia di rette intersecantesi, ossia coplanari: le due quantita' di moto iniziali quindi definiscono un piano. D'altra parte, per lo stesso motivo le traiettorie finali dei punti materiali costituiscono un'altra coppia di rette intersecantesi, e quindi le quantita' di moto finali definiscono anch'esse un piano (a priori diverso dal primo). Le caratteristiche dei due piani iniziale e finale dipendono dal sistema di riferimento in cui la collisione viene descritta.

a) A causa della mancanza di dimensioni finite dei punti materiali, nel CM non ci sono effetti trasversali durante la collisione: la variazione della quantita' di moto puo' solo avvenire longitudinalmente. Si puo' capire questa affermazione prendendo in considerazione l'urto fra sfere rigide a dimensione finita: in assenza di forze tangenziali, la forza di contatto che agisce durante l'urto in questo caso e' diretta lungo la congiungente i due

centri. Nel riferimento del CM quella che e' rilevante e' la direzione della retta congiungente i due centri al momento del contatto, rispetto a quella della velocita' relativa determinata dall'angolo α nella figura.



Nel limite di sfere di raggio nullo l'unica possibilita' di contatto si verifica quando la congiungente i due centri coincide con la traiettoria dei due punti nel CM. Quindi, a rigore, nel riferimento del CM per le collisioni fra punti materiali mediate da forze di contatto l'unico urto possibile e' quello 'testa a testa', che risulta in una collisione unidimensionale (1D). L'urto fra due punti materiali, nel limite sopra descritto, ha dunque una proprieta' particolarmente semplice nel riferimento del CM: si tratta sempre di una collisione *collineare*. Si osservi che la proprieta' di *collinearita*' e' aggiuntiva a quella, piu' generica, dell'*antiparallelismo* fra le quantita' di moto/velocita' dei due punti nel riferimento del CM, prima e dopo la collisione, conseguenza della conservazione della quantita' di moto: di fatto, quest'ultima riguarda l'*orientamento* dei rispettivi vettori, mentre la prima aggiunge la *sovrapponibilita'* spaziale delle traiettorie, che giacciono quindi lungo la stessa retta.

b) In un altro riferimento inerziale, il valore delle velocita'/quantita' di moto iniziali/finali si ottiene con una trasformazione di Galilei, in cui tutte le velocita' vengono addizionate della velocita' del CM nel riferimento scelto:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1^* + \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1^{*\prime} + \boldsymbol{v}_0$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2^* + \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2^{*\prime} + \boldsymbol{v}_0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1^* \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}_2^* = \left(\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*\right) \times \boldsymbol{v}_0$$
$$\rightarrow \boldsymbol{v}_1' \times \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1^{*\prime} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}_2^{*\prime} = \left(\boldsymbol{v}_1^{*\prime} - \boldsymbol{v}_2^{*\prime}\right) \times \boldsymbol{v}_0$$

Vettori velocita' collineari nel CM: $\hat{\boldsymbol{n}}$ versore della direzione

$\boldsymbol{v}_1^* = \alpha\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_2^* = \beta\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_1^{*\prime} = \gamma\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_2^{*\prime} = \delta\hat{\boldsymbol{n}}$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^* = (\alpha - \beta)\hat{\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{v}_1^{*\prime} - \boldsymbol{v}_2^{*\prime} = (\gamma - \delta)\hat{\boldsymbol{n}} \end{cases}$$

$$\rightarrow (\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*) \parallel (\boldsymbol{v}_1^{*\prime} - \boldsymbol{v}_2^{*\prime}) \rightarrow (\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*) \times \boldsymbol{v}_0 \parallel (\boldsymbol{v}_1^{*\prime} - \boldsymbol{v}_2^{*\prime}) \times \boldsymbol{v}_0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v}_1' \times \boldsymbol{v}_2' \parallel \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$$

$\Pi =$ piano definito dalle vel. iniziali

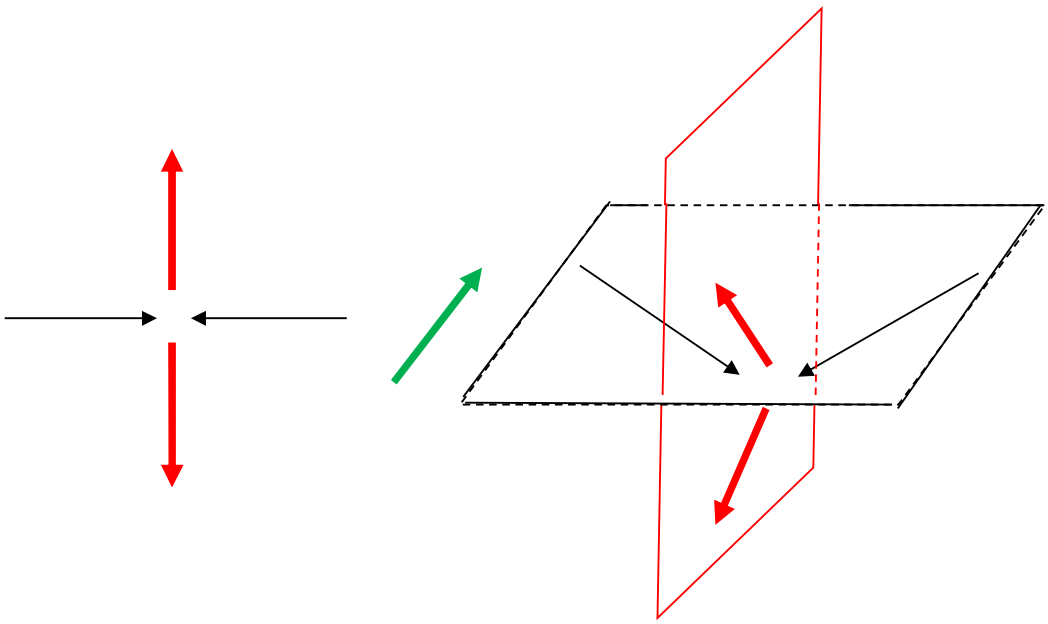
$\Pi' =$ piano definito dalle vel. finali

$\rightarrow$ Normale a $\Pi \parallel$ Normale a Π'

Quindi l'urto risulta *piano* in tutti i riferimenti inerziali, e *collineare* nel CM.

Alla luce delle conclusioni appena raggiunte, puo' lasciare qualche dubbio il caso, ampiamente trattato in molti esempi ed esercizi, dell'urto fra due punti materiali nel quale, nel riferimento del CM, c'e' una variazione della direzione finale rispetto a quella iniziale. Esso viene introdotto per estendere la casistica delle collisioni riducendo al minimo le complicazioni legate alla struttura dei corpi che urtano, e puo' essere considerato il limite dell'urto fra due sfere rigide di raggio finito, come descritto sopra, nel quale si continua a non tener conto dei gradi di liberta' interni (rotazione) delle sfere, ma si considera la possibilita' di una deflessione delle traiettorie: come nell'urto fra palle da biliardo quando si trascura la rotazione ma si tiene conto della loro dimensione finita quanto agli effetti sulla deflessione delle biglie. Di fatto, quindi, l'approssimazione equivale innanzi tutto a considerare una forza di contatto fra corpi di dimensioni finite, dei quali si trascura la rotazione propria. In considerazione delle dimensioni finite dei due corpi, si assume che le traiettorie possano risultare piu' o meno deflesse nel CM. Come seconda semplificazione, si puo' poi assumere che l'urto avvenga, come prima, quando i due corpi sono nella stessa posizione spaziale, trascurando l'effetto del parametro d'urto. Rifacendosi alle considerazioni precedenti sulla collinearita' e sulla necessaria intersezione delle traiettorie iniziali e finali nel riferimento del CM, l'urto risultera' in questo caso bidimensionale in quel

riferimento. Viceversa, l'urto di questo tipo non e' in generale piano in un riferimento qualsiasi: questo si puo' vedere considerando il caso di una collisione elastica piana con deflessione di 90 gradi nel CM; quando si osservi lo stesso processo da un riferimento in cui il CM si muove con la velocita' $\boldsymbol{v}_{CM}$ (freccia verde), il piano definito dalle quantita' di moto iniziali non coincide con quello definito dalle quantita' di moto finali



Riassumendo: oltre alla conservazione della quantita' di moto totale, del moto del CM, ed eventualmente dell'energia cinetica totale se l'urto e' elastico, nell'urto di due punti materiali sui quali non agiscano forze esterne, e per i quali le forze interne siano di contatto, vale la conservazione del momento angolare totale: infatti il momento meccanico esterno e' nullo perche' non ci sono forze esterne, e quello interno e' nullo essendo il raggio d'azione zero. Nei casi fin qui considerati la conservazione del momento angolare totale non aggiunge tuttavia informazioni a quelle ottenute dalla conservazione delle altre grandezze meccaniche. Questa e' una conseguenza del limite di interazione puntiforme, nel quale limite il momento angolare totale nel riferimento del CM e' nullo: $\boldsymbol{L}^* = 0$, e la sua conservazione (0 = 0) non da' informazioni aggiuntive. Anche nel caso di collisioni non unidimensionali, se trascuriamo il moto di rotazione dei corpi il momento angolare totale in un riferimento qualsiasi coincide con quello $\boldsymbol{L}_{CM}$ dovuto al moto del CM (rettilineo e uniforme): esso e' conservato ma non da' informazioni aggiuntive sulla dinamica della collisione.

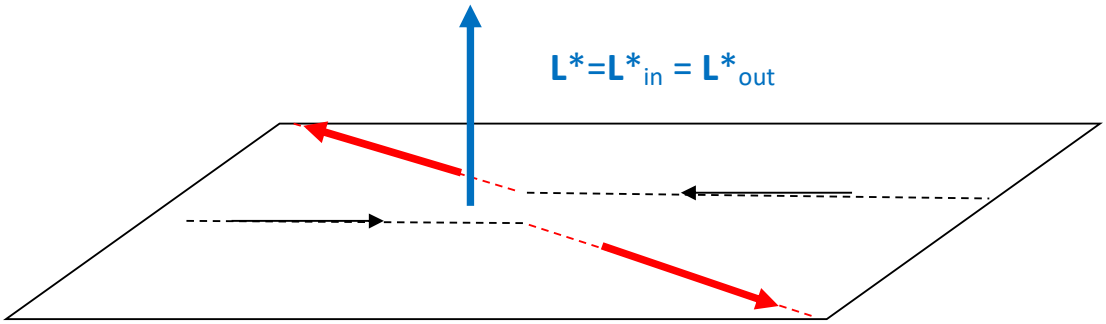
2) Forze a lungo raggio d'azione

Volendo allargare la definizione di processo d'urto a un certo numero di casi concreti, viene naturale prendere in considerazione, oltre ai casi, gia' considerati e piu' intuitivi, di forze o di contatto, o a corto range, anche quello di forze a distanza, o a lungo range (p es quella attrattiva gravitazionale nell' 'urto' fra una cometa e il Sole, o quella repulsiva elettrostatica fra particella α e nucleo, nello scattering di Rutherford): questo e' utile perche' in entrambi i casi valgono le stesse leggi di conservazione.

Nella sua forma piu' generale il problema dell'interazione fra due punti materiali in assenza di forze esterne, e in presenza di forze interne a distanza, e' noto come *problema dei due corpi:* di esso fanno parte i casi di sistema legato (es. problema di Kepler, per la forza di gravitazione) o slegato (es. scattering di Rutherford, per la forza elettrostatica); il secondo caso e' quello dell'urto. In entrambi i casi, come e' noto, risulta vantaggioso separare il moto del CM dal moto relativo.

Avendo ipotizzato che la forza esterna totale sia nulla, la quantita' di moto totale del sistema e' costante, e il moto del CM risulta essere rettilineo e uniforme; sempre nell'ipotesi che il momento meccanico esterno sia nullo, il momento angolare del moto del CM e' anch'esso conservato, ma non aggiunge informazioni sulla collisione (v.sopra). Similmente e' conservata l'energia cinetica del moto del CM.

Le caratteristiche del moto relativo dipendono dalle proprieta' delle forze interne, diverse da caso a caso; in ogni caso il moto relativo risulta equivalente al moto di un solo corpo, con massa uguale alla massa ridotta dei due corpi, sotto l'azione di una forza interna equivalente: come e' ovvio, la quantita' di moto relativa non risulta in generale conservata perche' la velocita' relativa non e' in generale costante. Per lo stesso motivo anche l'energia cinetica del moto relativo non e' in generale conservata, mentre nel caso in cui la forza interna sia conservativa la somma di energia cinetica ed energia potenziale e' costante. Nel caso di forze/potenziali centrali risulta invece conservato il momento angolare orbitale del moto relativo; come conseguenza il moto relativo rimane confinato in un piano. Il momento angolare del moto relativo coincide con il momento angolare totale nel CM: il moto dei due corpi rimane quindi piano anche nel riferimento del CM, mentre non e' in generale piano in un riferimento qualsiasi (v.sopra)



Se le forze interne hanno caratteristiche non centrali il momento angolare del moto relativo non e' in generale conservato, e il moto relativo stesso non e' necessariamente piano, conclusioni che si estendono immediatamente al moto dei due corpi nel riferimento del CM. Esempi realistici di forze non centrali si possono trovare quando si considerino effetti magnetici fra particelle cariche in movimento; in questi stessi casi, oltre all'apparente non conservazione del momento angolare totale, si puo' trovare anche un'apparente non conservazione della quantita' di moto e/o dell'energia totale.

3) Simmetrie, invarianza e leggi di conservazione

E' bene sottolineare che in casi come quelli citati sopra la non conservazione dell'energia, della quantita' di moto, della velocita' del CM o del momento angolare totale e' solo apparente, in quanto viene trascurato il contributo alle rispettive grandezze contenuto nel campo elettromagnetico, sia statico sia irraggiato durante la collisione. Il contenuto di energia, quantita' di moto e momento angolare del campo elettromagnetico e' analogo a quello di un sistema di punti materiali, ma non si manifesta come proprieta' meccanica localizzata come nel caso di un sistema di punti. La conservazione del momento angolare totale per un sistema isolato, al pari di quelle della quantita' di moto, dell'energia, e della velocita' del CM, e' assunta essere sempre valida, perche' deriva da proprieta' fondamentali di invarianza dei sistemi fisici, conseguenza di simmetrie fondamentali dello spazio-tempo, ben verificate e indipendenti dalle leggi di Newton: l'apparente violazione di una di queste leggi di conservazione indica di fatto una incompletezza nella descrizione del sistema stesso.