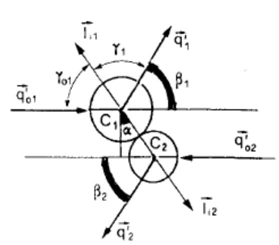
Collisioni e leggi di conservazione

1) Punti materiali e forze di contatto

Si assume che le dimensioni fisiche del corpo considerato siano trascurabili; come conseguenza, viene trascurato anche il suo eventuale moto ‘interno’ di rotazione. Nel limite di punti materiali, le forze di contatto, per loro natura a ‘corto range’, diventano a ‘zero range’, stante l’assenza di scale proprie di lunghezza: l’interazione di contatto avviene solo se i due punti materiali occupano, a qualche istante, la stessa posizione. Come conseguenza, la collisione avviene se le traiettorie iniziali dei due punti materiali costituiscono una coppia di rette intersecantesi, ossia coplanari: le due quantita’ di moto iniziali quindi definiscono un piano. D’altra parte, per lo stesso motivo le traiettorie finali dei punti materiali costituiscono un’altra coppia di rette intersecantesi, e quindi le quantita’ di moto finali definiscono anch’esse un piano (a priori diverso dal primo).

Le caratteristiche dei due piani iniziale e finale dipendono dal sistema di riferimento in cui la collisione viene descritta.

a) A causa della mancanza di dimensioni finite dei punti materiali, nel CM non ci sono effetti trasversali durante la collisione: la variazione della quantita’ di moto puo’ solo avvenire longitudinalmente. Si puo’ capire questa affermazione prendendo in considerazione l’urto fra sfere rigide a dimensione finita: in assenza di forze tangenziali, la forza di contatto che agisce durante l’urto in questo caso e’ diretta lungo la congiungente i due centri. Nel riferimento del CM quella che e’ rilevante e’ la direzione della retta congiungente i due centri al momento del contatto, rispetto a quella della velocita’ relativa determinata dall’angolo α nella figura.



Nel limite di sfere di raggio nullo l’unica possibilita’ di contatto si verifica quando la congiungente i due centri coincide con la traiettoria dei due punti nel CM. Quindi, a rigore, nel riferimento del CM per le collisioni fra punti materiali mediate da forze di contatto l'unico urto possibile e' quello 'testa a testa', che risulta in un urto unidimensionale (1D). L'urto fra due punti materiali, nel limite sopra descritto, ha dunque una proprieta' particolarmente semplice nel riferimento del CM: si tratta sempre di una collisione *collineare*. Si osservi che la proprieta' di *collinearita*' e' aggiuntiva a quella, piu' generica, dell'*antiparallelismo* fra le quantita' di moto/velocita' dei due punti nel riferimento del CM, prima e dopo la collisione, conseguenza della conservazione della quantita' di moto: di fatto, quest'ultima riguarda l'*orientament*o dei rispettivi vettori, mentre la prima aggiunge la *sovrapponibilita'* spaziale delle traiettorie, che giacciono quindi lungo la stessa retta.

b) In un altro riferimento inerziale, il valore delle velocita'/quantita' di moto iniziali/finali si ottiene con una trasformazione di Galilei, in cui tutte le velocita' vengono addizionate della velocita' del CM nel riferimento scelto:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1^* + \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1^{*\prime} + \boldsymbol{v}_0$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2^* + \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2^{*\prime} + \boldsymbol{v}_0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1^* \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}_2^* = \left(\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*\right) \times \boldsymbol{v}_0$$
$$\rightarrow \boldsymbol{v}_1' \times \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1^{*\prime} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}_2^{*\prime} = \left(\boldsymbol{v}_1^{*\prime} - \boldsymbol{v}_2^*\right) \times \boldsymbol{v}_0$$

Vettori velocita' collineari nel CM: $\hat{\boldsymbol{n}}$ versore della direzione

$$\boldsymbol{v}_1^* = \alpha \hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_2^* = \beta \hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_1^{*\prime} = \gamma \hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_2^{*\prime} = \delta \hat{\boldsymbol{n}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^* = (\alpha - \beta)\hat{\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{v}_1^{*\prime} - \boldsymbol{v}_2^{*\prime} = (\gamma - \delta)\hat{\boldsymbol{n}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*\right) \parallel \left(\boldsymbol{v}_1^*{}' - \boldsymbol{v}_2^*{}'\right) \rightarrow \left(\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*\right) \times \boldsymbol{v}_0 \parallel \left(\boldsymbol{v}_1^*{}' - \boldsymbol{v}_2^*{}'\right) \times \boldsymbol{v}_0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v}_1' \times \boldsymbol{v}_2' \parallel \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$$

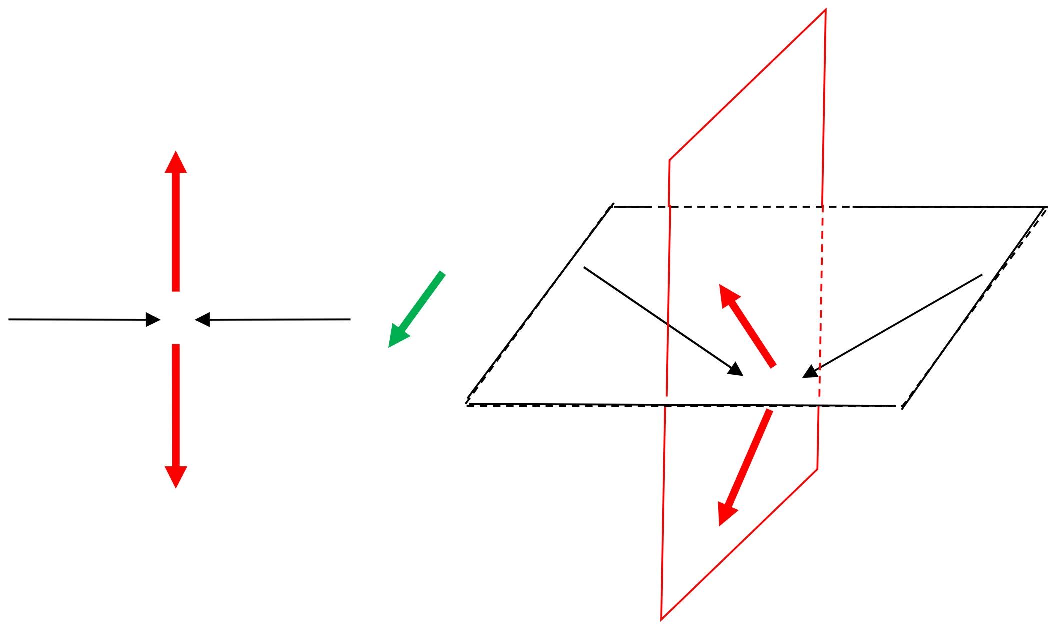
$\Pi =$ piano definito dalle vel. iniziali
$\Pi' =$ piano definito dalle vel. finali

$\rightarrow$ Normale a $\Pi \parallel$ Normale a Π'

Quindi l'urto risulta *piano* in tutti i riferimenti inerziali.

2) Punti materiali e forze di contatto: Urti in 2D

Alla luce delle conclusioni appena raggiunte, puo' lasciare qualche dubbio il caso, ampiamente trattato in molti esempi ed esercizi, dell'urto fra due punti materiali nel quale, nel riferimento del CM, c'e' una variazione della direzione finale rispetto a quella iniziale. Questo caso viene introdotto per estendere la definizione di urto nel modo piu' semplice, e puo' essere considerato il limite dell'urto fra due sfere rigide di raggio finito, come descritto sopra, nel quale non si tiene conto dei gradi di liberta' interni (rotazione) delle sfere, ma si considera la possibilita' di una deflessione delle traiettorie dei due punti: come nell'urto fra palle da biliardo quando si trascura la rotazione ma si tiene conto della loro dimensione finita per cio' che riguarda la deflessione delle biglie. Di fatto, questa approssimazione equivale a considerare una forza a zero range fra punti materiali che ha una dipendenza angolare. Rifacendosi alle considerazioni precedenti sulla collinearita' e sulla necessaria intersezione delle traiettorie iniziali e finali nel riferimento del CM, l'urto risultera' in generale in due dimensioni in quel riferimento. Viceversa, l'urto di questo tipo non e' in generale piano in un riferimento qualsiasi: questo si puo' vedere nel modo piu' semplice considerando il caso di una collisione elastica piana con deflessione di 90 gradi nel CM; quando si osservi lo stesso processo da un riferimento in cui il CM si muove con la velocita' $\boldsymbol{v}_{CM}$ (freccia verde), il piano definito dalle quantita' di moto iniziali non coincide con quello definito dalle quantita' di moto finali



3) Urti e leggi di conservazione: momento angolare

Oltre alla conservazione della quantita' di moto totale, ed eventualmente dell'energia cinetica totale se l'urto e' elastico, nell'urto di due punti materiali sui quali non agiscano forze esterne, e per i quali le forze interne siano di contatto, vale la conservazione del momento angolare totale: infatti il momento meccanico esterno e' nullo perche' non ci sono forze esterne, e quello interno e' nullo essendo il raggio d'azione zero. Nei casi fin qui considerati, tuttavia, la conservazione del momento angolare totale non aggiunge informazioni a quelle ottenute dalla conservazione della quantita' di moto (e dell'energia cinetica, se l'urto e' elastico). Questa e' una conseguenza del limite di interazione puntiforme che e' stato considerato, nel quale limite il momento angolare totale nel riferimento del CM e' nullo a causa del raggio d'azione zero della forza di contatto: $\boldsymbol{L}^* = 0$, e la sua conservazione (0 = 0) non da' informazioni aggiuntive. Anche nel caso di collisioni non unidimensionali, se trascuriamo il moto di rotazione dei corpi, il momento angolare totale in un riferimento qualsiasi coincide con quello $\boldsymbol{L}_{CM}$ dovuto al moto del CM (rettilineo e uniforme): esso e' conservato ma non da' informazioni aggiuntive, rispetto alla conservazione della quantita' di moto totale, sulla dinamica della collisione.

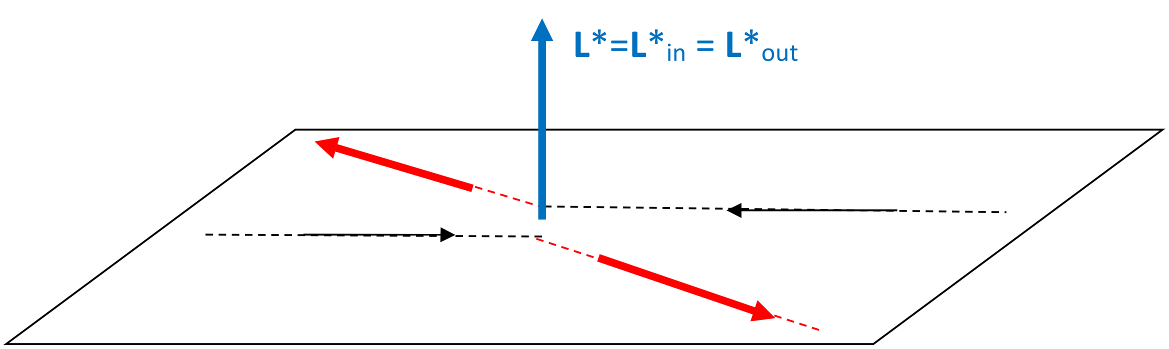
4) Forze a lungo raggio d'azione

Volendo allargare la definizione di processo d'urto a un certo numero di casi concreti, viene naturale prendere in considerazione, oltre ai casi, gia' considerati e piu' intuitivi, di forze o di contatto, o a corto range, anche quello di forze a distanza, o a lungo range (p es quella attrattiva gravitazionale nell' 'urto' fra una cometa e il Sole, o quella repulsiva elettrostatica fra particella α e nucleo, nello scattering di Rutherford): questo e' utile perche' in entrambi i casi valgono le stesse leggi di conservazione.

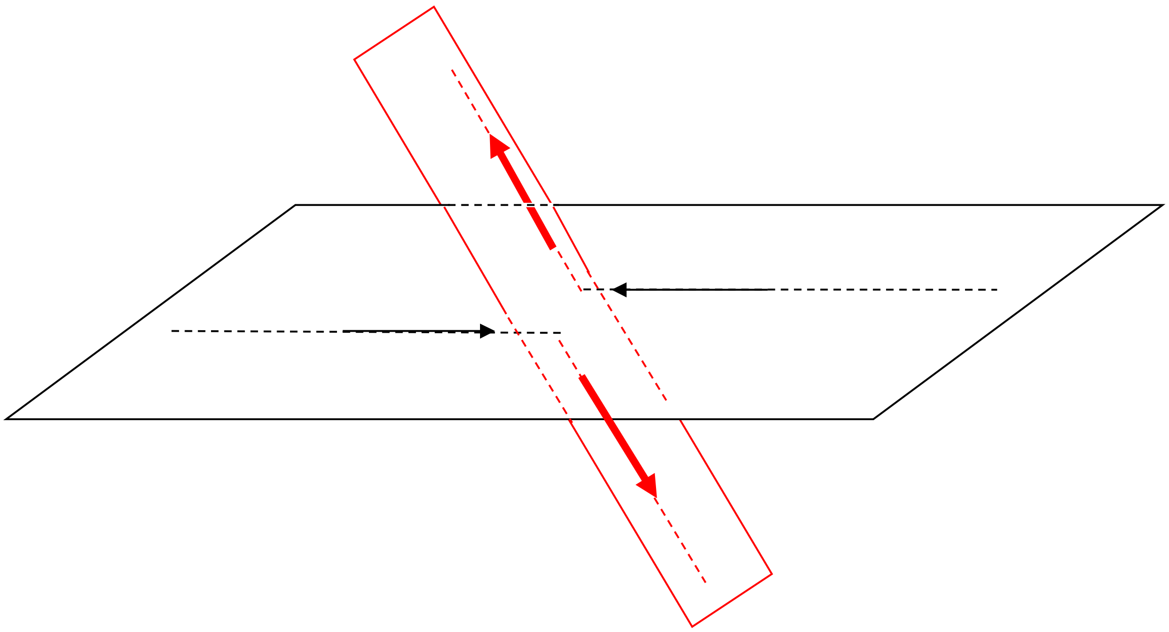
Nella sua forma piu' generale il problema dell'interazione fra due punti materiali in assenza di forze esterne, e in presenza di forze interne a distanza, e' noto come *problema dei due corpi:* di esso fanno parte i casi di sistema legato (es. problema di Kepler, per la forza di gravitazione) o slegato (es. scattering di Rutherford, per la forza elettrostatica); il secondo caso e' quello dell'urto. In entrambi i casi, come e' noto, risulta vantaggioso separare il moto del CM dal moto relativo, equivalente al moto di un solo corpo, con massa uguale alla massa ridotta dei due corpi, in un potenziale fisso.

Avendo ipotizzato che la forza esterna totale sia nulla, il moto del CM risulta essere rettilineo e uniforme, e corrispondentemente la quantita' di moto totale del sistema costante; il momento angolare del moto del CM e' anch'esso conservato, ma non aggiunge informazioni sulla collisione (v.sopra)

Le caratteristiche del moto relativo dipendono dalle proprieta' delle forze interne, diverse da caso a caso, ma in generale, come e' ovvio, la quantita' di moto del moto relativo non risulta conservata. Nel caso di forze/potenziali centrali risulta invece conservato il momento angolare orbitale per il moto relativo, che come conseguenza rimane confinato in un piano. Il momento angolare del moto relativo coincide con il momento angolare totale nel CM: il moto dei due corpi rimane quindi piano anche nel riferimento del CM, mentre non e' in generale piano in un riferimento qualsiasi (v.sopra)



Se le forze/potenziali hanno caratteristiche non centrali il momento angolare del moto relativo non e' in generale conservato, e il moto relativo stesso non e' necessariamente piano; stessa conclusione per il moto dei due corpi nel riferimento del CM



Esempi realistici di forze non centrali si possono trovare in varie situazioni, p es quando si considerino effetti magnetici fra particelle cariche in movimento.

E' bene sottolineare pero' che in casi come questi la non conservazione del momento angolare totale e' solo apparente, in quanto viene trascurata la componente del momento angolare totale contenuta nel campo elettromagnetico, sia statico sia irraggiato durante la collisione. La conservazione del momento angolare totale per un sistema isolato, al pari di quelle della quantita' di moto e dell'energia, e' assunta essere sempre valida, perche' deriva da principi fondamentali di simmetria ben verificati e indipendenti dalle leggi di Newton: l'apparente violazione di una di queste tre leggi di conservazione indica di fatto una incompletezza nella descrizione del sistema stesso.