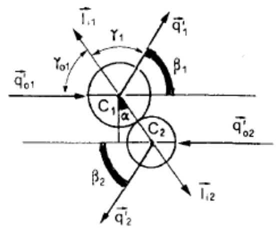
Collisioni

Nello studio dei processi d'urto si fa ampio uso delle leggi di conservazione della dinamica dei sistemi: per un sistema isolato esse riguardano la quantita' di moto, il momento angolare, l'energia (urti elastici), il moto del centro di massa. Non sempre pero' risulta completamente chiaro quale sia il modello fisico della collisione che viene usato per applicarle: scopo di questa nota e' cercare di chiarire le approssimazioni che vengono introdotte nella descrizione degli urti fra particelle puntiformi.

1) Punti materiali e forze di contatto: 1D, 2D e 3D

Il modello piu' semplice di collisione e' quello fra oggetti di cui si trascurano le dimensioni, interagenti tramite forze di contatto; come conseguenza, viene trascurato anche il loro eventuale moto 'proprio' di rotazione. Nel limite di punti materiali, le forze di contatto, che per loro natura sono nella realta' a 'corto range', diventano a 'zero range', stante l'assenza di scale proprie di lunghezza: l'interazione di contatto avviene solo se i due punti materiali occupano, a qualche istante, la stessa posizione. Come conseguenza, la collisione avviene se le traiettorie iniziali dei due punti materiali costituiscono una coppia di rette intersecantesi: le due rette quindi definiscono un piano. D'altra parte, per lo stesso motivo le traiettorie finali dei punti materiali costituiscono un'altra coppia di rette intersecantesi, e quindi definiscono anch'esse un piano, a priori diverso dal primo. Le caratteristiche dei due piani iniziale e finale dipendono dal sistema di riferimento in cui la collisione viene descritta.

a) A causa della mancanza di dimensioni finite dei punti materiali, nel CM non ci sono effetti trasversali durante la collisione: la quantita' di moto puo' solo variare longitudinalmente. Si puo' capire questa affermazione prendendo in considerazione l'urto fra sfere rigide a dimensione finita: in assenza di forze tangenziali, la forza di contatto che agisce durante l'urto in questo caso e' diretta lungo la congiungente i due centri. Nel riferimento del CM quella che e' rilevante e' la direzione della retta congiungente i due centri al momento del contatto, rispetto a quella della velocita' relativa determinata dall'angolo α nella figura.



Nel limite di sfere di raggio nullo l'unica possibilita' di contatto si verifica quando la congiungente i due centri coincide con la traiettoria dei due punti nel CM. Quindi, a rigore, nel riferimento del CM per le collisioni fra punti materiali mediate da forze di contatto l'unico urto possibile e' quello 'testa a testa', che risulta in una collisione unidimensionale (1D). L'urto fra due punti materiali, nel limite sopra descritto, ha dunque una proprieta' particolarmente semplice nel riferimento del CM: si tratta sempre di una collisione *collineare*. Si osservi che la proprieta' di *collinearita*' e' aggiuntiva a quella, piu' generica, dell'*antiparallelismo* fra le quantita' di moto/velocita' dei due punti nel riferimento del CM, prima e dopo la collisione, conseguenza della conservazione della quantita' di moto e della definizione di CM: di fatto, quest'ultima riguarda l'*orientament*o dei rispettivi vettori, mentre la prima aggiunge la *sovrapponibilita'* spaziale delle traiettorie, che giacciono quindi lungo la stessa retta.

b) In un altro riferimento inerziale, il valore delle velocita'/quantita' di moto iniziali/finali si ottiene con una trasformazione di Galilei, in cui tutte le velocita' vengono addizionate della velocita' del CM nel riferimento scelto:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1^* + \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1^{*\prime} + \boldsymbol{v}_0$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2^* + \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2^{*\prime} + \boldsymbol{v}_0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1^* \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}_2^* = \left(\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*\right) \times \boldsymbol{v}_0$$
$$\rightarrow \boldsymbol{v}_1' \times \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1^{*\prime} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v}_2^{*\prime} = \left(\boldsymbol{v}_1^{*\prime} - \boldsymbol{v}_2^*\right) \times \boldsymbol{v}_0$$

Vettori velocita' collineari nel CM: $\hat{\boldsymbol{n}}$ versore della direzione

$$\boldsymbol{v}_1^* = \alpha \hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_2^* = \beta \hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_1^{*\prime} = \gamma \hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v}_2^{*\prime} = \delta \hat{\boldsymbol{n}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^* = \left(\alpha - \beta\right) \hat{\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{v}_1^{*\prime} - \boldsymbol{v}_2^{*\prime} = \left(\gamma - \delta\right) \hat{\boldsymbol{n}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*\right) \parallel \left(\boldsymbol{v}_1^*{}' - \boldsymbol{v}_2^*{}'\right) \rightarrow \left(\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*\right) \times \boldsymbol{v}_0 \parallel \left(\boldsymbol{v}_1^*{}' - \boldsymbol{v}_2^*{}'\right) \times \boldsymbol{v}_0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v}_1' \times \boldsymbol{v}_2' \parallel \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$$

$\Pi =$ piano definito dalle vel. iniziali
$\Pi' =$ piano definito dalle vel. finali

$\rightarrow$ Normale a $\Pi \parallel$ Normale a Π'

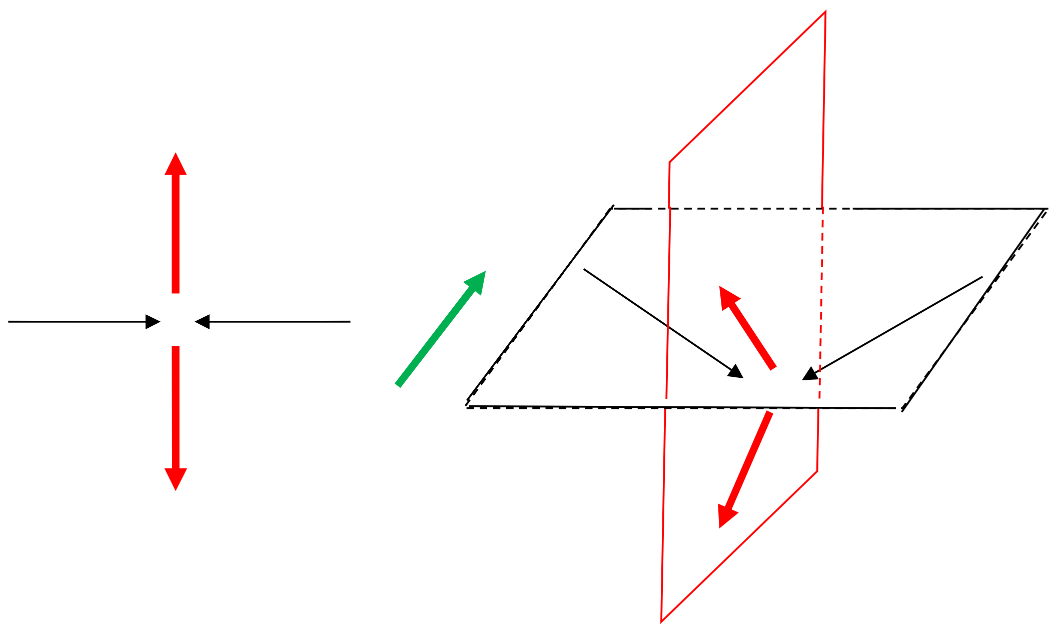
Poiche' i moti dei punti prima e dopo l'urto sono rettilinei e uniformi,
le traiettorie sono collineari alle velocita'

$\rightarrow$ Il piano definito dalle traiettorie iniziali coincide con quello
delle traiettorie finali

Quindi l'urto risulta *piano* in qualunque riferimento inerziale, e *collineare* nel CM.

2) Forze interne con una dipendenza angolare

Alla luce delle conclusioni appena raggiunte, puo' lasciare qualche dubbio il caso, ampiamente trattato in molti esempi ed esercizi, dell'urto fra due punti materiali nel quale, nel riferimento del CM, c'e' una variazione della direzione finale rispetto a quella iniziale. Esso viene introdotto per estendere la casistica delle collisioni riducendo al minimo le complicazioni legate alla struttura dei corpi che urtano, e puo' essere considerato il limite dell'urto fra due sfere rigide di raggio finito, come descritto sopra, nel quale si continua a non tener conto dei gradi di liberta' interni (rotazione) delle sfere, ma si considera la possibilita' di una deflessione delle traiettorie: come nell'urto fra palle da biliardo quando si trascura la rotazione ma si tiene conto della loro dimensione finita quanto agli effetti sulla deflessione delle biglie. Di fatto, quindi, l'approssimazione equivale innanzi tutto a considerare una forza di contatto fra corpi di dimensioni finite, dei quali si trascura la rotazione propria. In considerazione delle dimensioni finite dei due corpi, si assume che le traiettorie possano risultare piu' o meno deflesse nel CM. Come seconda semplificazione, si puo' poi assumere, come prima, che l'urto avvenga quando i due corpi sono nella stessa posizione spaziale. Rifacendosi alle considerazioni precedenti sulla collinearita' e sulla necessaria intersezione delle traiettorie iniziali e finali nel riferimento del CM, l'urto risultera' in questo caso bidimensionale in quel riferimento. L'urto di questo tipo non e' in generale piano in un riferimento qualsiasi: questo si puo' vedere considerando il caso di una collisione elastica piana con deflessione di 90 gradi nel CM; quando si osservi lo stesso processo da un riferimento in cui il CM si muove con la velocita' $\boldsymbol{v}_{CM}$ (freccia verde), il piano definito dalle quantita' di moto iniziali non coincide con quello definito dalle quantita' di moto finali



3) Momento angolare e moto del CM

Come accennato all'inizio, nell'urto di due punti materiali sui quali non agiscano forze esterne, oltre alla conservazione della quantita' di moto totale, ed eventualmente dell'energia cinetica totale per urti elastici, valgono la conservazione del moto del CM e del momento angolare totale. Le leggi di conservazione citate non aggiungono tuttavia informazioni a quelle ottenute dalla conservazione delle altre grandezze, nel caso considerato di forze interne puramente di contatto. In termini generali, la conservazione del moto del CM non e' indipendente dalla conservazione della quantita' di moto totale: l'una puo' essere ricavata dall'altra una volta risolte le equazioni del moto, e di conseguenza la costanza di $\boldsymbol{v}_{CM}$ non porta informazioni indipendenti sulla collisione. D'altra parte, nel limite di interazione puntiforme la collisione avviene quando i due punti materiali si trovano nella stessa posizione $\boldsymbol{r_0}$: quindi la conservazione del momento angolare totale si scrive

$$(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)_{in} = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)_{fin}$$

Poiche' la collisione avviene nel punto $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{p}_1^{\ in} \times \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}_2^{\ in} \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{p}_1^{\ fin} \times \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}_2^{\ fin} \times \mathbf{r}_0$$

$$\rightarrow \left(\mathbf{p}_1^{\ fin} - \mathbf{p}_1^{\ in}\right) \times \mathbf{r}_0 = -\left(\mathbf{p}_2^{\ fin} - \mathbf{p}_2^{\ in}\right) \times \mathbf{r}_0$$

Percio':

$$\Delta(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = 0 \rightarrow \Delta(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}_2 \times \mathbf{r}_0) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \times \mathbf{r}_0 = 0 \leftrightarrow \Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

Quindi per questo caso la conservazione del momento angolare totale e' equivalente a quella della quantita' di moto totale.

4) Forze a lungo raggio d'azione

Volendo allargare la definizione di processo d'urto a un certo numero di casi concreti, viene naturale prendere in considerazione, oltre ai casi, gia' considerati e piu' intuitivi, di forze di contatto, o a corto range, anche quello di forze a distanza, o a lungo range (p es quella attrattiva gravitazionale nell' 'urto' fra una cometa e il Sole, o quella repulsiva elettrostatica fra particella α e nucleo, nello scattering di Rutherford): questo e' utile perche' in entrambi i casi valgono le stesse leggi di conservazione. Nella sua forma piu' generale il problema dell'interazione fra due punti materiali in assenza di forze esterne, e in presenza di forze interne a distanza, e' noto come *problema dei due corpi:* di esso fanno parte i casi di sistema legato (es. problema di Kepler, per la forza di gravitazione) o slegato (es. scattering di Rutherford, per la forza elettrostatica); il secondo caso e' quello dell'urto. In entrambi i casi, come e' noto, risulta vantaggioso separare il moto del CM dal moto relativo.

Avendo ipotizzato che la forza esterna totale sia nulla, la quantita' di moto totale del sistema e' costante, e il moto del CM risulta essere rettilineo e uniforme; nell'ipotesi che anche il momento meccanico esterno sia nullo, il momento angolare del moto del CM e' anch'esso conservato; similmente e' conservata l'energia cinetica del moto del CM.

Le caratteristiche del moto relativo dipendono dalle proprieta' delle forze interne, diverse da caso a caso; in ogni caso il moto relativo risulta equivalente al moto di un solo corpo, con massa uguale alla massa ridotta dei due corpi, sotto l'azione di una forza efficace.

La quantita' di moto relativa non risulta in generale conservata perche' la velocita' relativa non e' in generale costante; per lo stesso motivo anche l'energia cinetica del moto relativo non e' in generale conservata; nel caso in cui la forza interna sia conservativa e' invece costante la somma di energia cinetica ed energia potenziale. Nel caso di forze/potenziali centrali risulta conservato il momento angolare orbitale del moto relativo; come conseguenza il moto relativo rimane confinato in un piano; nel caso limite in cui il momento angolare orbitale e' nullo il moto relativo e' rettilineo. Il momento angolare del moto relativo coincide con il momento angolare totale nel CM: anche il moto dei due corpi rimane quindi piano nel riferimento del CM, mentre non e' in generale piano in un riferimento qualsiasi (v.sopra).

Nel caso di forze centrali a lungo raggio, quindi, la conservazione del mom. angolare totale fornisce informazioni indipendenti sulla collisione