Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 1

1-1)Le citta' di Singapore e Quito sono all'incirca sull'Equatore; Singapore si trova a circa 104^0 di longitudine Est, mentre Quito sta a circa 78^0 di longitudine Ovest. Determinare il modulo del vettore spostamento relativo fra le due citta', e la loro distanza geografica

La differenza di longitudine fra le due citta' e':

$$\delta = 104^0 + 78^0 = 182^0 \sim 180^0$$

$$R = \text{raggiodellaTerra}$$

$$\rightarrow d \approx 2R \approx 2 \cdot 6400\ km = 12800\ km = 1.28 10^7 m$$

$$\rightarrow D \approx \pi R = 3.14 \cdot 6400\ km = 2.01 10^7 m$$

1-2) Il modulo del prodotto esterno di due vettori e' uguale al loro prodotto interno. Determinare l'angolo fra i due vettori

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$$\rightarrow \sin\theta = \cos\theta \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

1-3) Sia $\boldsymbol{A}(t) = a\cos\omega t\hat{\boldsymbol{i}} + a\sin\omega t\hat{\boldsymbol{j}}$; mostrare che $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \perp \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}(t) = a\cos\omega t\hat{\boldsymbol{i}} + a\sin\omega t\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = -a\omega\sin\omega t\hat{\boldsymbol{i}} + a\omega\cos\omega t\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\boldsymbol{A}(t) \cdot \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = -a^2\omega^2 \sin\omega t\cos\omega t + a^2\omega^2\cos\omega t\sin\omega t = 0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{A}(t) \perp \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}$$

1-4)Calcolare $\left(\left(\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}}\right)\times\hat{\boldsymbol{i}}\right)\times\hat{\boldsymbol{i}},\quad \left(\left(\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}}\right)\times\hat{\boldsymbol{j}}\right)\times\hat{\boldsymbol{j}}$

$$\left(\left(\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}}\right)\times\hat{\boldsymbol{i}}\right)\times\hat{\boldsymbol{i}}$$
$$\left(\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}}\right)=\hat{\boldsymbol{k}}$$
$$\rightarrow\left(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{i}}\right)\times\hat{\boldsymbol{i}}$$
$$\left(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{i}}\right)=\hat{\boldsymbol{j}}$$
$$\rightarrow\hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{i}}=-\hat{\boldsymbol{k}}$$
$$\left(\left(\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}}\right)\times\hat{\boldsymbol{j}}\right)\times\hat{\boldsymbol{j}}$$
$$\rightarrow\left(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{j}}\right)\times\hat{\boldsymbol{j}}=-\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}}=-\hat{\boldsymbol{k}}$$

1-5) Una pallina lasciata cadere da ferma da un'altezza $h_1 = 1\ m$ rimbalza sul pavimento e risale all'altezza $h_2 = 0.75\ m$; se la collisione dura $0.01\ s$, determinare l'accelerazione media durante la collisione

$$v_{prima}=-\sqrt{2gh_1}$$
$$v_{dopo}=\sqrt{2gh_2}$$
$$\rightarrow\Delta v=\sqrt{2gh_2}+\sqrt{2gh_1}$$
$$\rightarrow\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\sqrt{2gh_2}+\sqrt{2gh_1}}{\Delta t}=\sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{h_2}+\sqrt{h_1}}{\Delta t}$$
$$\rightarrow\bar{a}=\sqrt{2\cdot 9.81}\,\frac{\sqrt{0.75}+\sqrt{1}}{0.01}=826.5ms^{-2}$$

1-6) Un'astronave nello spazio esterno accelera con $a = g$ costante fino a raggiungere una velocita' $v = 1/10$ della vel. della luce. Per quanto tempo accelera?

$$v=at$$
$$\rightarrow\frac{c}{10}=at\rightarrow t=\frac{c}{10a}$$
$$\rightarrow t=\frac{310^8}{10\cdot 10}\ s=310^6 s\sim 1\ mese$$

1-6) Il macchinista di un treno che procede a velocita' costante v_1 vede davanti a se' un altro treno a distanza d, che procede a velocita' v_2 nella stessa direzione. L'intervento del freno di emergenza introduce una decelerazione costante a. Determinare le condizioni per le quali si ha o non si ha collisione fra i due treni.

$$\begin{cases} x_1(t) = v_1 t - \frac{1}{2}at^2 \\ x_2(t) = d + v_2 t \end{cases}$$

$$\rightarrow v_1 t - \frac{1}{2}at^2 = d + v_2 t$$

$$\rightarrow [v_1 - v_2]t = d + \frac{1}{2}at^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}at^2 - [v_1 - v_2]t + d = 0$$

$$\rightarrow t^2 - \frac{2}{a}[v_1 - v_2]t + \frac{2d}{a} = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{[v_1 - v_2]}{a} \pm \sqrt{\frac{[v_1 - v_2]^2}{a^2} - \frac{2d}{a}}$$

$$\rightarrow t = \frac{[v_1 - v_2]}{a} \pm \frac{[v_1 - v_2]}{a}\sqrt{1 - \frac{2da}{[v_1 - v_2]^2}}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} [v_1 - v_2]^2 > 2da & \text{Sol. reali } \rightarrow \text{ Crash} \\ [v_1 - v_2]^2 < 2da & \text{Sol. complesse } \rightarrow \text{No crash} \end{matrix}$$

1-7) Un'auto parte da ferma quando il semaforo diventa verde, con accelerazione costante di $2\ ms^{-2}$; nell'istante iniziale un camion le passa accanto a velocita' costante di $10\ ms^{-1}$. Determinare a quale distanza l'auto raggiunge il camion, e qual e' la sua velocita' nell'istante del sorpasso

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 \\ x_2(t) = vt \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}at'^2 = vt' \rightarrow t' = \frac{2v}{a}$$

$$x_2(t') = v\frac{2v}{a} = \frac{2v^2}{a} = \frac{2 \cdot 10^2}{2}m = 100m$$

$$v_1(t) = at \rightarrow v_1(t') = a\frac{2v}{a} = 2v = 20ms^{-1}$$

1-8) Un punto materiale viene lanciato verso l'alto da terra con velocita' iniziale v_0; esso si trova all'altezza h in due istanti successivi t_1 e t_2. Mostrare che la misura dei due istanti di passaggio ad un'altezza data fornisce una misura di g.

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_{\max} = \frac{v_0}{g}, x_{\max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

Per $x = h$:

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = h$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + h = 0$$

$$\rightarrow t^2 - \frac{2v_0}{g} t + \frac{2h}{g} = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2gh}{g^2}} = \frac{v_0}{g} \pm \frac{v_0}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}$$

$$\rightarrow t_1 t_2 = \left(\frac{v_0}{g} + \frac{v_0}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}\right)\left(\frac{v_0}{g} - \frac{v_0}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}\right)$$

$$\rightarrow t_1 t_2 = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 \left(1 - \frac{2gh}{v_0^2}\right)$$

$$\rightarrow t_1 t_2 = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g} = \frac{2h}{g}$$

$$\rightarrow g = \frac{2h}{t_1 t_2}$$