Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 10

10-1) Due blocchi di massa m_1 e m_2, collegati da una molla priva di massa e di costante elastica k, poggiano su un piano orizzontale privo di attrito. Alla massa m_2 e' applicata una forza orizzontale costante F. Se non si instaurano oscillazioni, determinare l'allungamento della molla

Molla: forza interna, non influisce sul moto del CM

$$\rightarrow F=(m_1+m_2)a \rightarrow a=\frac{F}{m_1+m_2}$$

$$F-kx=m_2a=\frac{m_2}{m_1+m_2}F$$

$$\rightarrow x=\frac{F}{k}\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)=\frac{F}{k}\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

10-2) Un fuoco d'artificio, lanciato verticalmente con velocita' iniziale v_0, esplode in due frammenti di ugual massa. Dopo un tempo t_1 dall'esplosione, uno dei due frammenti e' alla quota h_1; determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.

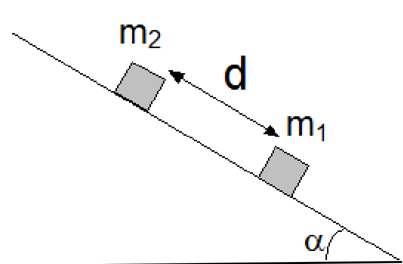
Moto del CM non influenzato dall'esplosione (forze interne)

$$\rightarrow z_{CM}(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\rightarrow z_{CM}(t_1)=v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{h_1m+h_2m}{2m}=\frac{h_1+h_2}{2}$$

$$\rightarrow h_2=2\left(v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2\right)-h_1$$

10-3) Due blocchi di ugual massa $m = 2\ kg$ e diverso coefficiente di attrito $\mu_1 = 0.4$ e $\mu_2 = 0.2$ scendono lungo un piano inclinato. I blocchi, inizialmente distanti $d = 1m$ e fermi, vengono liberati simultaneamente



Calcolare:
l'istante in cui si urtano
la velocita' subito dopo l'urto se restano in contatto

$$a_1 = g\sin\alpha - g\mu_1\cos\alpha = g\left(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha\right)$$

$$a_2 = g\sin\alpha - g\mu_2\cos\alpha = g\left(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} s_1 = d + \frac{1}{2}a_1t^2 \\ s_2 = \frac{1}{2}a_2t^2 \end{cases}$$

$$s_1 = s_2 \rightarrow d + \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}a_2t^2$$

$$\rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{2d}{a_2 - a_1}} = \sqrt{\frac{2d}{\left(\mu_1 - \mu_2\right)g\cos\alpha}}$$

$$mv_1\left(\bar{t}\right) + mv_2\left(\bar{t}\right) = 2mv\left(\bar{t}\right)$$

$$\rightarrow v\left(\bar{t}\right) = \frac{v_1\left(\bar{t}\right) + v_2\left(\bar{t}\right)}{2}$$

$$v_1\left(\bar{t}\right) = a_1\bar{t} = g\left(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha\right)\sqrt{\frac{2d}{\left(\mu_1 - \mu_2\right)g\cos\alpha}}$$

$$v_2\left(\bar{t}\right) = a_2\bar{t} = g\left(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha\right)\sqrt{\frac{2d}{\left(\mu_1 - \mu_2\right)g\cos\alpha}}$$

$$\rightarrow v\left(\bar{t}\right) = \frac{v_1\left(\bar{t}\right) + v_2\left(\bar{t}\right)}{2} = g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\cos\alpha\right)\sqrt{\frac{2d}{\left(\mu_1 - \mu_2\right)g\cos\alpha}}$$

10-4) Un nucleo radioattivo, inizialmente in quiete, decade emettendo un elettrone e un neutrino ad angolo retto l'uno rispetto all'altro; la quantita' di moto dell'elettrone e' $1.2\ 10^{-22}\ kg\ ms^{-1}$, e quella del neutrino di $6.4\ 10^{-23}\ kg\ ms^{-1}$. Trovare la direzione e il modulo della quantita' di moto del nucleo dopo il decadimento; se il nucleo ha massa $M = 5.8\ 10^{-26}\ kg$, qual e' la sua energia cinetica?

$\boldsymbol{P}_{in} = 0 = \boldsymbol{P}_{fin}$ Solo forze interne

$$\boldsymbol{P}_{fin} = \boldsymbol{p}_e + \boldsymbol{p}_\nu + \boldsymbol{p}_N = 0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{p}_N = -\left(\boldsymbol{p}_e + \boldsymbol{p}_\nu\right)$$

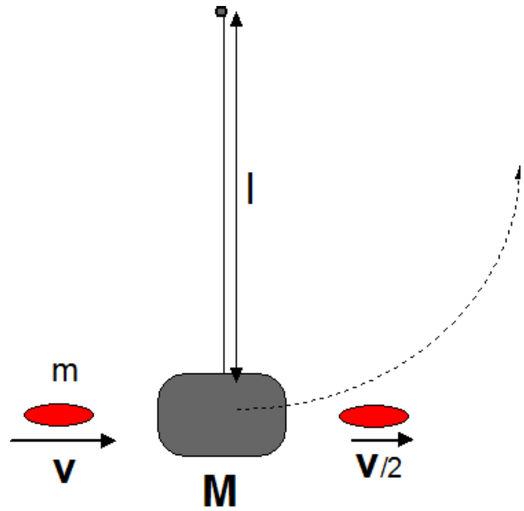
$$\rightarrow \left|\boldsymbol{p}_N\right|^2 = \left|\boldsymbol{p}_e + \boldsymbol{p}_\nu\right|^2 = \left(\boldsymbol{p}_e + \boldsymbol{p}_\nu\right)\cdot\left(\boldsymbol{p}_e + \boldsymbol{p}_\nu\right)$$

$$\rightarrow \left|\boldsymbol{p}_N\right|^2 = p_e^2 + p_\nu^2 + 2\underbrace{\boldsymbol{p}_e\cdot\boldsymbol{p}_\nu}_{=0} = p_e^2 + p_\nu^2 \rightarrow p_N = \sqrt{p_e^2 + p_\nu^2}$$

Se

$$\boldsymbol{p}_e \parallel x, \boldsymbol{p}_\nu \parallel y \rightarrow p_N^x = -p_e, p_N^y = -p_\nu$$

10-5) Un proiettile di massa m e velocita' v passa attraverso un blocco di massa M, sospeso a un filo privo di massa di lunghezza l. Il proiettile emerge dal blocco con velocita' $v/2$: qual e' il minimo valore di v che consente a M di fare un giro completo?



$$mv = m\frac{v}{2} + Mv'$$

$$\rightarrow v' = \frac{mv}{2M}$$

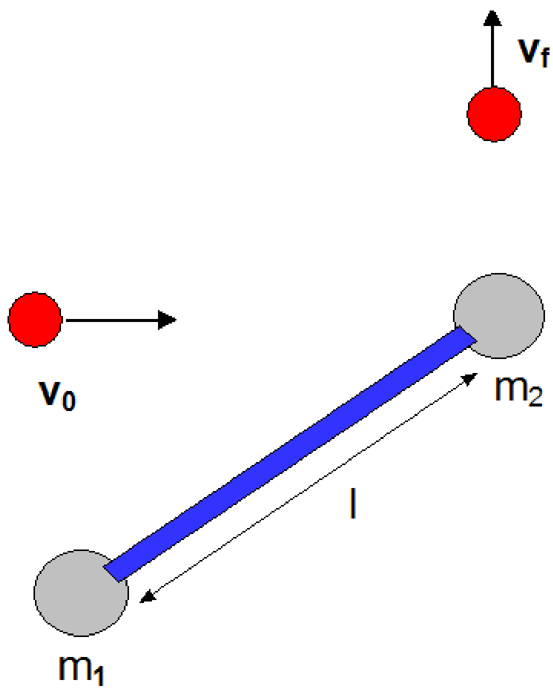
$$\rightarrow \frac{1}{2}Mv'^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{mv}{2M}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{4M} = \frac{m^2}{8M}v^2$$

$$\rightarrow \frac{m^2}{8M}v^2 = \frac{5}{2}Mgl$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{5}{2}gl\frac{8M^2}{m^2} = 20gl\frac{M^2}{m^2}$$

$$\rightarrow v = \frac{M}{m}\sqrt{20gl}$$

10-6) Due masse m_1, m_2, collegate da un'asta di massa trascurabile lunga l, sono ferme su una superficie liscia. Una terza massa m, con velocita' v_0, colpisce la massa m_2 e rincula con velocita' v_f come in figura. Calcolare la velocita del CM dopo l'urto.

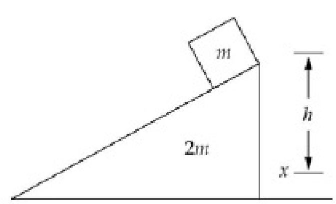


$$\Delta \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_f - m\boldsymbol{v}_0 = m\left(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_0\right)$$

$$\Delta \boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{F}_{ext} dt = M\boldsymbol{v}_{CM}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v}_{CM} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{M} = \frac{m}{m_1 + m_2}\left(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_0\right)$$

10-7) Un blocchetto di massa m e' inizialmente fermo, appoggiato all'altezza h su un cuneo di massa $2m$. Trascurando gli attriti, trovare le velocita' di blocchetto e cuneo quando il blocchetto arriva sul pavimento.



Non conservazione della quantita' di moto totale:

$\boldsymbol{p}_c + \boldsymbol{p}_b \neq$ cost $\leftarrow$ Forza esterna $\neq 0$ (gravita')

Conservazione della quantita' di moto orizzontale:

$$p_c^x + p_b^x = 0$$
$$\rightarrow -mv_b \cos\alpha = 2mv_c$$
$$\rightarrow v_b \cos\alpha = -2v_c$$

Conservazione dell'energia meccanica:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}2mv_c^2$$
$$\rightarrow gh = \frac{1}{2}v_b^2 + v_c^2 = \frac{1}{2}v_b^2 + \frac{v_b^2}{4} = \frac{3v_b^2}{4}$$
$$\rightarrow v_b = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$
$$\rightarrow v_c = -\frac{v_b \cos\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{3}gh}\cos\alpha$$

NB Il blocchetto arriva sul pavimento con una componente verticale non nulla della quantita' di moto, quindi di fatto “rimbalza” sul pavimento (come la cosa possa venire modellata dipende da noi: urto elastico/anelastico, urto contro un corpo di massa infinita – o il pianeta Terra/finita) ripartendo verso l’alto. Queste considerazioni non cambierebbero se si considerasse la discesa lungo una guida sagomata con uscita orizzontale: semplicemente in questo caso la “collisione” con il pavimento verrebbe diluita su un intervallo di tempo piu’ lungo.