Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 11

11-1) Un punto materiale di massa $m_1 = 5\ kg$, che si muove con velocita' $v_1 = 2\ ms^{-1}$, collide elasticamente con un altro punto materiale fermo, di massa $m_2 = 8\ kg$. Se m_1 viene deflesso di un angolo $\theta_1 = 50^0$, trovare le velocita' dei due punti dopo la collisione.

$$\boldsymbol{p}_1 + \underbrace{\boldsymbol{p}_2}_{=0} = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' \rightarrow \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2'$$

$$\rightarrow \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_1' = \boldsymbol{p}_2' \rightarrow \left|\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_1'\right|^2 = p_2'^2$$

$$\rightarrow p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1'\cos\theta_1 = p_2'^2$$

Urto elastico:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \rightarrow \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{p_1^2 - p_1'^2}{2m_1} \rightarrow p_2'^2 = \left(p_1^2 - p_1'^2\right)\frac{m_2}{m_1}$$

$$\rightarrow p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1'\cos\theta_1 = \left(p_1^2 - p_1'^2\right)\frac{m_2}{m_1}$$

$$\rightarrow p_1'^2\frac{m_2}{m_1} + p_1'^2 - 2p_1p_1'\cos\theta_1 = p_1^2\frac{m_2}{m_1} - p_1^2 = p_1^2\frac{m_2 - m_1}{m_1}$$

$$\rightarrow p_1'^2\left(\frac{m_2 + m_1}{m_1}\right) - 2p_1p_1'\cos\theta_1 - p_1^2\frac{m_2 - m_1}{m_1} = 0$$

$$\rightarrow p_1' = \frac{p_1\cos\theta_1 \pm \sqrt{p_1^2\cos^2\theta_1 + p_1^2\frac{m_2 - m_1}{m_1}\frac{m_2 + m_1}{m_1}}}{\frac{m_2 + m_1}{m_1}}$$

$$\rightarrow p_1' = \frac{p_1\cos\theta_1 \pm p_1\sqrt{\cos^2\theta_1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_1^2}}}{\frac{m_2 + m_1}{m_1}}$$

$$\to v'_1 = \frac{p_1'}{m_1} = \frac{p_1}{m_1} \frac{\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_1^2}}}{\frac{m_2 + m_1}{m_1}} = p_1 \frac{\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_1^2}}}{m_2 + m_1}$$

$$\to v'_1 = p_1 \frac{\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1}\sqrt{m_1^2\cos^2\theta_1 + m_2^2 - m_1^2}}{m_2 + m_1} = p_1 \frac{\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1}\sqrt{m_2^2 - \left(m_1^2 - m_1^2\cos^2\theta_1\right)}}{m_2 + m_1}$$

$$\to v'_1 = p_1 \frac{\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1}\sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\theta_1}}{m_2 + m_1} = v_1 \frac{m_1}{m_2 + m_1}\left(\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1}\sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\theta_1}\right)$$

$m_2 > m_1$: OK sempre

$m_1 > m_2 : m_1 \sin\theta_1 < m_2 \to \sin\theta_1 < \frac{m_2}{m_1}$ Angolo di uscita di m_1 limitato

$$\to v'_1 \approx 1.57 ms^{-1}$$

$$p'^2_2 = m_2^2 v'^2_2 = \left(p_1^2 - p'^2_1\right)\frac{m_2}{m_1} = \left(m_1^2 v_1^2 - m_1^2 v'^2_1\right)\frac{m_2}{m_1} = m_1 m_2 \left(v_1^2 - v'^2_1\right)$$

$$\to v'^2_2 = \frac{m_1}{m_2}\left(v_1^2 - v'^2_1\right) \to v'_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}\left(v_1^2 - v'^2_1\right)} \approx 0.979 ms^{-1}$$

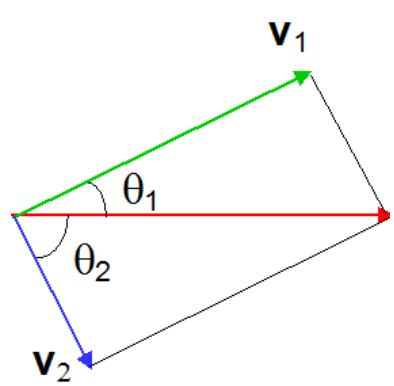
Nota

La presenza di due soluzioni, e la scelta di quale tenere puo' dar luogo a confusione: per chiarire la cosa conviene far riferimento al caso limite di due masse uguali.

$m_1 = m_2 = m$: Caso limite

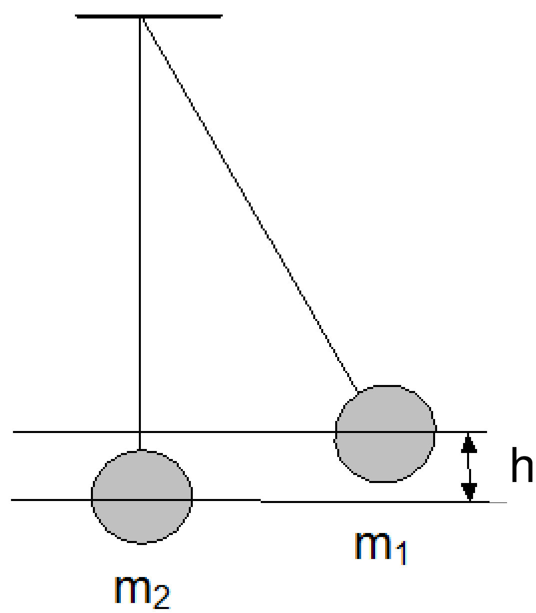
$$v'_1 = \frac{v_1}{2}\left(\cos\theta_1 \pm \cos\theta_1\right) = \begin{cases} v_1\cos\theta_1 \\ 0 \end{cases}$$

$$v'_2 = \sqrt{\left(v_1^2 - v'^2_1\right)} = \begin{cases} v_1\sin\theta_1 \\ v_1 \end{cases}$$



La II soluzione compare perche' e' stata imposta la conservazione della qdm quadraticamente, senza richiedere nulla di specifico sulle componenti: ora, la seconda soluzione soddisfa alle 2 leggi di conservazione quanto la prima, ma ovviamente non contiene una delle 2 masse deflessa di θ_1 . Questa possibilita' esiste in principio perche' nella conservazione del quadrato della qdm totale compare il prodotto $pp' \cos \theta_1$, che va a 0 se p' e' nullo per qualunque angolo di deflessione. Quindi si tratta di una soluzione spuria, conseguenza del metodo abbreviato che si e' seguito: se avessimo imposto separatamente la conservazione delle 2 componenti cartesiane della qdm nel piano dell'urto il problema non sarebbe sorto. Le considerazioni si estendono al caso di masse disuguali.

11-2) La sfera 1 viene lasciata andare da ferma; se le masse delle sfere sono $m_1 = 0.1\ kg$ e $m_2 = 0.2\ kg$, e se $h = 0.2\ m$, trovare le altezze alle quali arrivano se l'urto e' elastico



Cons. energia nella caduta:

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

Cons. energia nell'urto:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} m_2 v''^2$$

Cons. quantita' di moto nell'urto:

$$m_1 v = m_1 v' + m_2 v''$$

$$\rightarrow v'' = \frac{m_1}{m_2}(v - v')$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 (v - v')^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_2}\left(v^2 + v'^2 - 2vv'\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} m_1 v^2 \frac{m_1}{m_2} + \frac{1}{2} m_1 v'^2 \frac{m_1}{m_2} - vv' \frac{m_1^2}{m_2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} m_1 v^2 \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} m_1 v'^2 \frac{m_1}{m_2} - vv' \frac{m_1^2}{m_2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_1 v^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{1}{2} m_1 v'^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) - vv' \frac{m_1^2}{m_2}$$

$$\rightarrow v^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) = v'^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) - 2vv' \frac{m_1}{m_2}$$

$$\rightarrow v'^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) - 2vv' \frac{m_1}{m_2} - v^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) = 0$$

$$\rightarrow v' = \frac{v \frac{m_1}{m_2} \pm \sqrt{v^2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + v^2 \left(1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right)}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} = \frac{v \frac{m_1}{m_2} \pm v \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right)}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}$$

$$\rightarrow v' = \frac{v \frac{m_1}{m_2} \pm v}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} = v \frac{\frac{m_1}{m_2} \pm 1}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} = v \frac{\frac{m_1 \pm m_2}{m_2}}{\frac{m_2 + m_1}{m_2}} = v \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\to v' = \begin{cases} v & \text{banale} \\ v\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \qquad \to v'' = \frac{m_1}{m_2}(v - v') = \begin{cases} 0 & \text{banale} \\ v\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$\to m_1 g h' = \frac{1}{2} m_1 v'^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

$$\to h' = \frac{\frac{1}{2} m_1 v^2 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2}{m_1 g} = \frac{m_1 g h \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2}{m_1 g}$$

$$\to h' = h \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

Altezza raggiunta da m_1 :

$$h' = 0.2 \left[\frac{-0.1}{0.3} \right]^2 = \frac{0.2}{9} \approx 0.022 \ m$$

$$\to h'' = \frac{v'^2_2}{2g} = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 (v_1 - v_1')^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \frac{v_1^2 \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{(m_2 + m_1)} \right)^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} \left(\frac{2m_2}{(m_2 + m_1)} \right)^2$$

$$\to h'' = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(\frac{2}{(m_2 + m_1)} \right)^2 \frac{m_1}{g} = \frac{4m_1^2}{(m_2 + m_1)^2} h$$

Altezza raggiunta da m_2 :

$$h'' = \frac{4 \cdot 0.01}{(0.3)^2} 0.2 = \frac{0.04}{0.09} 0.2 \approx 0.089 \ m$$

Nota

Anche qui, apparentemente compare una seconda soluzione, corrispondente a qdm invariata per le due masse: si tratta del caso banale in cui non c'e' collisione, che ovviamente soddisfa anch'esso le leggi di conservazione se non si aggiunge qualche altra specifica sullo stato finale.
Si noti come il segno di v' possa essere positivo o negativo, a seconda se m_1 e' > o < di m_2: nel secondo caso, m_1 di fatto 'rimbalza' contro m_2 , tornando indietro. Viceversa il segno di v'' e' sempre positivo

11-3) Un neutrone (m=1.67 10^{-27} kg) di energia cinetica iniziale E_k = 1.6 10^{-13} J si muove urtando nuclei di deuterio (m_D = 3.34 10^{-27} kg) oppure carbonio (m_C =19.9 10^{-27} kg) essenzialmente fermi. Per ognuno dei due casi, stimare quante collisioni elastiche collineari sono necessarie a portare il neutrone all'energia termica E_t=4 $10^{-21}J$

Urto elastico: riutilizzando il risultato dell'esercizio precedente

$$v' = v\frac{m-M}{m+M} \to \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2$$

$$\frac{E_k'}{E_k} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2$$

Dopo n urti:

$$\frac{E_k^{(n)}}{E_k} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^{2n} \to R = \frac{E_k^{(n)}}{E_k} = \frac{E_{term}}{E_{iniz}} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^{2n}$$

$$\to \ln R = 2n\ln\left(\frac{M-m}{M+n}\right) \to n = \frac{\ln R}{2\ln\left(\frac{M-m}{M+n}\right)}$$

$$R = \frac{410^{-21}}{1.610^{-13}} \approx 2.510^{-8} \to \ln R \approx -17.5$$

Deuterio:

$$\frac{M-m}{M+m} \approx \frac{3.34-1.67}{3.34+1.67} \to \ln\frac{M-m}{M+m} \approx -1.1$$

$$\to n \approx 0.5\frac{17.5}{1.1} \approx 7.95$$

Carbonio:

$$\frac{M-m}{M+m} \approx \frac{19.9-1.67}{19.9+1.67} \to \ln\frac{M-m}{M+m} \approx -0.17$$

$$\to n \approx 0.5\frac{17.5}{0.17} \approx 51.5$$

11-4) Un elettrone di massa m urta collinearmente contro un atomo di massa M, inizialmente fermo, e come risultato l'atomo viene eccitato e assorbe una quantita' di energia E. Qual e' la velocita' iniziale minima che deve avere l'elettrone?

Urto anelastico, anelasticita' nota = E.

$$mv = mv' + Mv''$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}Mv''^2 + E$$

$$\rightarrow v' = v - \frac{M}{m}v''$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv''^2 + E + \frac{1}{2}m\left(v - \frac{M}{m}v''\right)^2$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{M}{m}v''^2 + \frac{2E}{m} + v^2 + \left(\frac{M}{m}\right)^2 v''^2 - 2vv''\frac{M}{m}$$

$$\rightarrow 0 = \left[\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2\right]v''^2 - 2vv''\frac{M}{m} + \frac{2E}{m}$$

$$\rightarrow v'' = \frac{2v\frac{M}{m} \pm \sqrt{\left(2v\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{8E}{m}\left[\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2\right]}}{2\left[\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2\right]}$$

$$\left(2v\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{8E}{m}\left[\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2\right] > 0$$

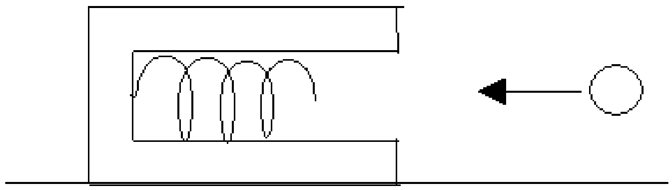
$$\rightarrow 2v\frac{M}{m} > \sqrt{\frac{8E}{m}\left[\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2\right]}$$

$$\rightarrow v > \frac{m}{2M}\sqrt{\frac{8E}{m}\left[\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2\right]} = \frac{m}{2M}\sqrt{\frac{8E}{m}\frac{M}{m}\left[1 + \frac{M}{m}\right]} = \frac{1}{M}\sqrt{2EM\left[1 + \frac{M}{m}\right]}$$

$$\rightarrow v > \sqrt{2E\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right]} \sim \sqrt{\frac{2E}{m}}, M \gg m$$

Il caso corrisponde a totale cessione all'atomo dell'en. cinetica dell'elettrone, che esce fermo dal processo; la qdm viene interamente trasferita all'atomo, che esce tuttavia con velocita' ed en. cinetica trascurabili a causa della sua grande massa.

11-5) Una sfera di massa m viene sparata all'interno di una cavita' in un blocco di massa M, inizialmente fermo, in fondo alla quale si trova una molla ideale a riposo; la sfera rimane bloccata quando la molla e' alla massima compressione. Trascurando gli attriti, quale frazione dell'energia cinetica iniziale rimane immagazzinata nella molla?



Urto anelastico:

$$mv = (m+M)v'$$

$$\rightarrow v' = v\frac{m}{m+M}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+M)v'^2 + E_{molla}$$

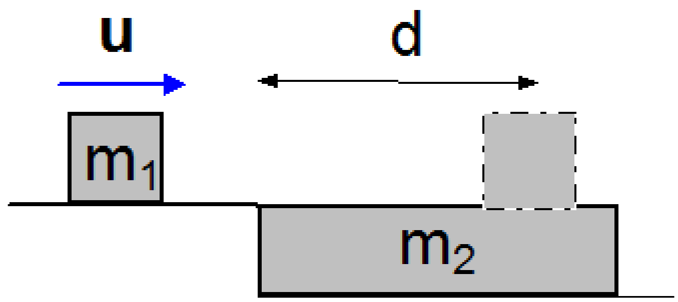
$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 + E_{molla}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{m+M}\frac{1}{2}mv^2 + E_{molla}$$

$$\rightarrow E_{molla} = \frac{1}{2}mv^2\left(1-\frac{m}{m+M}\right) = \frac{1}{2}mv^2\frac{M}{m+M}$$

$$\rightarrow \frac{E_{molla}}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{M}{m+M}$$

11-6) Un blocco di massa m_1 scorre senza attrito su un piano orizzontale con velocita' u, e poi, con attrito, sopra un secondo blocco di massa m_2, come in figura. Dopo aver percorso la distanza d m_1 si ferma rispetto a m_2. Trovare la velocita' comune di m_1 e m_2 quando viaggiano assieme, le energie cinetiche prima e dopo la collisione, e il coefficiente di attrito fra i blocchi.



$$m_1 u = (m_1 + m_2) v$$

$$\rightarrow v = u \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

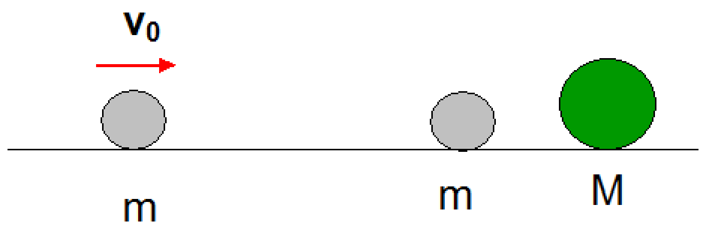
$$\rightarrow \frac{1}{2} m_1 u^2, \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) u^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} u^2 = \frac{1}{2} m_1 u^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$L_{attr} = F_{attr} d = \mu m_1 g d = \frac{1}{2} m_1 u^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{1}{2} m_1 u^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\rightarrow \mu = \frac{1}{2} m_1 u^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{m_1 g d} = \frac{u^2}{2gd} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

11-7) Si consideri il sistema della figura: mostrare che, per urti elastici, se $M>m$ ci sono in tutto 3 collisioni, se $M<m$ ce ne sono solo 2.



Urto elastico fra le due palle uguali:

$$\left.\begin{aligned} mv_0 &= mv' + mv'' = m(v'+v'') \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m\left(v'^2+v''^2\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{matrix} v'=v_0 \\ v''=0 \end{matrix}, \text{ oppure } \begin{matrix} v'=0 \\ v''=v_0 \end{matrix}$$

In ogni caso, una sfera resta ferma, l'altra riparte con vel.v_0

Urto elastico fra le due palle disuguali:

$$mv_0 = mv' + Mv'' \rightarrow v'' = \frac{m}{M}(v_0 - v')$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\left(mv'^2 + Mv''^2\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\left(mv'^2 + M\frac{m^2}{M^2}(v_0-v')^2\right) = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}\left(v_0^2+v'^2-2v_0v'\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{M}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{M}mv'^2 - \frac{m^2}{M}v_0v'$$

$$\rightarrow \left(1+\frac{m}{M}\right)v'^2 - 2\frac{m}{M}v_0v' - \left(1-\frac{m}{M}\right)v_0^2 = 0$$

$$\rightarrow v' = \frac{\frac{m}{M}v_0 \pm \sqrt{\left(\frac{m}{M}v_0\right)^2 + \left(1-\left(\frac{m}{M}\right)^2\right)v_0^2}}{1+\frac{m}{M}} = \frac{\frac{m}{M}v_0 \pm v_0\sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(1-\left(\frac{m}{M}\right)^2\right)}}{1+\frac{m}{M}}$$

$$\rightarrow v' = v_0\frac{\frac{m}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(1-\left(\frac{m}{M}\right)^2\right)}}{1+\frac{m}{M}} = v_0\frac{\frac{m}{M}\pm 1}{1+\frac{m}{M}} = v_0\frac{m\pm M}{m+M} = \begin{cases} v_0 \\ \dfrac{m-M}{m+M}v_0 \end{cases}$$

Seconda soluzione (la prima e' quella banale):

>0 se $m>M \rightarrow 2$ collisioni in tutto

<0 se $m<M \rightarrow 3$ collisioni in tutto (la terza e' di nuovo fra le due masse uguali)

$$v'' = \frac{m}{M}v_0 - v' = v_0\left(\frac{m}{M} - \frac{m-M}{m+M}\right) = v_0\frac{m(m+M) - M(m-M)}{(m+M)M} = v_0\frac{m^2+M^2}{(m+M)M}$$