Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 13

13-1) Un punto materiale di massa $m = 1kg$ viene lanciato orizzontalmente dal bordo di un carrello di massa $M = 6\ kg$, inizialmente fermo su un binario privo di attrito. Il corpo attraversa l'intera lunghezza $l = 2\ m$ del carrello in un tempo $T = 0.4\ s$. Trovare l'energia rilasciata nel lancio.

Conservazione qdm totale:

$$mv_1 + Mv_2 = 0 \rightarrow v_2 = -\frac{m}{M}v_1$$

v_1 : Vel. punto rispetto al terreno

$=$ Vel.punto rispetto al carrello + Vel.carrello rispetto al terreno

$$\text{Vel.punto rispetto al carrello} = \frac{l}{t}$$

$$v_1 = v_2 + \frac{l}{t}$$

$$\rightarrow v_1 = -\frac{m}{M}v_1 + \frac{l}{t}$$

$$\rightarrow v_1\left(1+\frac{m}{M}\right) = \frac{l}{t}$$

$$\rightarrow v_1 = \frac{l}{t\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \frac{M}{m+M}\frac{l}{t}$$

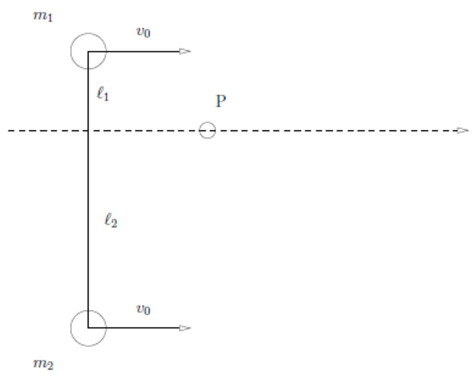
$$\rightarrow v_2 = \left(\frac{M}{m+M} - 1\right)\frac{l}{t} = -\frac{m}{m+M}\frac{l}{t}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m+M}\frac{l}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{m+M}\frac{l}{t}\right)^2$$

$$\rightarrow E_k = \frac{1}{2}\frac{mM^2 + Mm^2}{(m+M)^2}\left(\frac{l}{t}\right)^2 = \frac{mM}{m+M}\left(\frac{l}{t}\right)^2$$

$$\rightarrow E_k = \frac{6}{7}\left(\frac{2}{0.4}\right)^2 J = \frac{6}{7}25J \approx 21.4J$$

13-2) Il manubrio mostrato in figura e' costituito da due masse m uguali unite da un'asta rigida di lunghezza $l=l_1+l_2$ e massa trascurabile. Procedendo a velocita' costante v_0 urta il perno P, fissato al pavimento, al quale rimane attaccato essendo libero di ruotargli attorno. Calcolare la vel. angolare finale e l'en. cinetica dissipata nella collisione.



Conservazione del mom. angolare totale:

$$L_{in} = -m_1 l_1 v_0 + m_2 l_2 v_0$$

$$L_{fin} = m_1 \omega l_1^2 + m_2 \omega l_2^2$$

$$\rightarrow -m_1 l_1 v_0 + m_2 l_2 v_0 = m_1 \omega l_1^2 + m_2 \omega l_2^2$$

$$\rightarrow \omega = \frac{(m_2 l_2 - m_1 l_1) v_0}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}$$

$$\Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in}$$

$$\rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right)\omega^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_0^2$$

$$\rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right)\frac{(m_2 l_2 - m_1 l_1)^2}{\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right)^2} v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_0^2$$

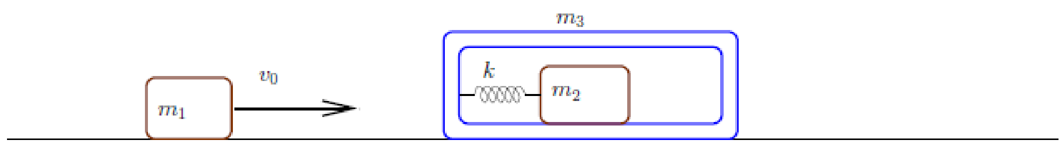
$$\rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2} v_0^2 \left[\frac{(m_2 l_2 - m_1 l_1)^2}{\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right)} - (m_1 + m_2)\right]$$

$$\rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{(m_2 l_2 - m_1 l_1)^2 - (m_1 + m_2)\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right)}{\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right)}$$

$$\rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\left(m_2^2 l_2^2 + m_1^2 l_1^2 - 2 m_2 l_2 m_1 l_1\right) - \left(m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2 + 2 m_1 m_2 \left(l_2^2 + l_1^2\right)\right)}{\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right)}$$

$$\rightarrow \Delta E_k = -\frac{m_1 m_2 \left(l_2^2 + l_1^2 + l_1 l_2\right)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} v_0^2$$

13-3) Nel sistema in figura m_1 urta elasticamente il sistema composito formato da m_2 e m_3. Trovare le velocita' dopo l'urto di m_1 e del CM di m_2 e m_3, nell'ipotesi che l'urto avvenga su una scala di tempo molto breve e che non ci sia attrito fra le superficie



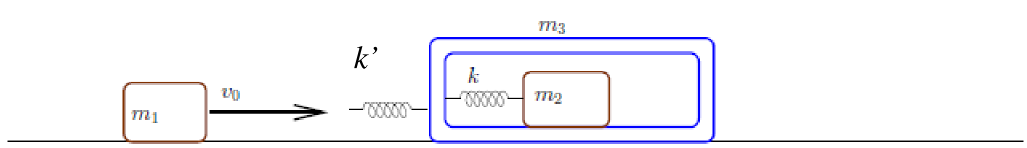
Quantificando il significato dell'espressione "scala di tempo molto breve":
Sistema $m_2 + m_3$: oscillatore armonico equivalente, massa ridotta

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$\rightarrow$ Si assume che la scala di tempo della collisione sia $t_{coll} \ll T$

[Per capire il significato di questa approssimazione:
si consideri un modello della collisione come quello della figura seguente:
la collisione e' anelastica, ma nel limite di k' molto grande
diventa $\sim$ elastica
($\leftarrow$ compressione piccola, poca en. potenziale nella molla, frequenza
di oscillazione elevata, tempo di risposta piccolo)]



In questo caso, m_2 ignora che la collisione sia avvenuta,
fino a che la molla non si sia compressa a sufficienza
[Approssimazione nota come "Approssimazione dell'impulso",
fra l'altro alla base del modello a partoni]

$\rightarrow$ Urto elastico $m_1 - m_3$

$$\rightarrow \begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_3 v_3 \\ \dfrac{1}{2} m_1 v_0^2 = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2} m_3 v_3^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{m_3 - m_1}{m_3 + m_1} v_0 \\ v_3 = \dfrac{2m_1}{m_3 + m_1} v_0 \end{cases}$$

Sistema $m_2 - m_3$:

$$v_{CM} = \frac{m_3 v_3}{m_3 + m_2} = \frac{m_3}{m_3 + m_2} \frac{2m_1}{m_3 + m_1} v_0$$

$$\rightarrow v_{CM} = \frac{2m_1 m_3}{(m_3 + m_2)(m_3 + m_1)} v_0$$

Dopo l'urto: Nel sistema $m_2 - m_3$ solo forze interne

$\rightarrow v_{CM} =$ cost

Oscillazione attorno al CM di m_2, m_3

13-4) Due pattinatrici, di ugual massa m = $55\ kg$, pattinano alla stessa velocita' v = $1.5\ ms^{-1}$ e in direzione opposta, lungo rette parallele a distanza d = $1.5\ m$. Quando sono alla distanza minima si prendono per mano e continuano muovendosi su un percorso circolare attorno al loro centro di massa.
Calcolare la forza che esercitano l'una sull'altra durante il moto circolare

$$\boldsymbol{L}_{in} = m\left(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2\right)$$

$$\rightarrow L_{in} = m\left(r_1 v_1 \cos\alpha + r_2 v_2 \cos\alpha\right) = 2mv\frac{d}{2} = mvd$$

$$L_{fin} = 2m\omega\left(\frac{d}{2}\right)^2 = m\omega\frac{d^2}{2}$$

$$\rightarrow m\omega\frac{d^2}{2} = mvd$$

$$\rightarrow \omega = \frac{2v}{d}$$

$$\rightarrow F_c = m\omega^2 r = m\frac{d}{2}4\frac{v^2}{d^2} = 2m\frac{v^2}{d}$$

$$m = 55\ kg,\ d = 1.5\ m,\ v = 1.5\ ms^{-1}:$$

$$\rightarrow F_c = 110 * 1.5N = 165N$$