Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 14

14-1) Calcolare il peso di una massa m su un pianeta che ha massa doppia e raggio meta' di quelli della Terra

$$p = mg$$

$$g_T = G\frac{M_T}{r_T^2}$$

$$g_P = G\frac{M_P}{r_P^2}$$

$$\rightarrow g_P = G\frac{2M_T}{\left(\frac{r_T}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow g_P = G\frac{8M_T}{r_T^2} = 8g_T$$

$$\rightarrow p_P = 8p_T$$

14-2) Un satellite sta in un'orbita circolare geostazionaria.
Calcolare il raggio dell'orbita del satellite

$$F_c = m\omega^2 r$$

$$F_G = G\frac{mM_T}{r^2}$$

$$\rightarrow \omega^2 r = G\frac{M_T}{r^2}$$

$$\rightarrow r^3 = \frac{GM_T}{\omega^2}$$

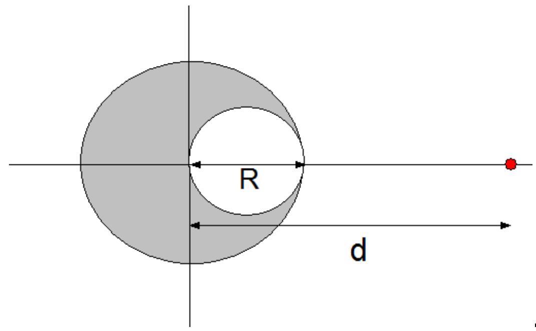
$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, T \text{ durata giorno sidereo}$$

$$\rightarrow r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\rightarrow r = \left(\frac{6.67 10^{-11} 6 10^{24} 8.46^2 10^8}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\rightarrow r \approx 4.17 10^7 m = 41.7 10^4 km$$

14-3) In una sfera pesante di raggio R e' scavata una cavita' sferica di raggio $R/2$ tangente alla superficie della sfera, come in figura; la massa della sfera prima dello svuotamento della cavita' era M



Trovare la forza gravitazionale esercitata dalla sfera con cavita' su un punto materiale di massa m posto a distanza d dal centro della sfera, lungo la retta che contiene i centri di sfera e cavita'.

Forza esercitata da sfera piena:

$F = G\frac{mM}{d^2}$ lungo la congiungente centro-punto

$$F = F_{sf.cava} + F_{tappo}$$

$$F_{tappo} = G\frac{mM_{tappo}}{\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}$$

$$M_{tappo} = \rho\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3, \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\rightarrow M_{tappo} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{M}{8}$$

$$\rightarrow F_{tappo} = G\frac{mM}{8\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow F_{sf.cava} = G\frac{mM}{d^2} - G\frac{mM}{8\left(d-\frac{R}{2}\right)^2} = G\frac{mM}{d^2} - G\frac{mM}{d^2}\frac{1}{8\left(1-\frac{R}{2d}\right)^2}$$

$$\rightarrow F_{sf.cava} = G\frac{mM}{d^2}\underbrace{\left[1-\frac{1}{8\left(1-\frac{R}{2d}\right)^2}\right]}_{\text{fattore di forma}}$$

14-4) La cometa di Halley percorre un'orbita ellittica, il cui perielio si osserva a distanza $r_{perielio}$ = $0.587\ UA$ dal Sole; il periodo dell'orbita e' di circa *76* anni. Calcolare la distanza dell'afelio e l'eccentricita' dell'orbita

$$r_{perielio} = (1-\varepsilon)a$$

$$r_{afelio} = (1+\varepsilon)a$$

$$T^2 \simeq \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

$$\rightarrow a \simeq \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{6.6710^{-11}210^{30}5.5110^{18}}{40}\right)^{1/3} \approx \left(18.410^{36}\right)^{1/3}$$

$$\rightarrow a \simeq 2.6410^{12}m$$

$$r_{perielio} = 0.587UA \simeq 87.810^{9}m$$

$$\rightarrow 1-\varepsilon = \frac{r_{perielio}}{a}$$

$$\rightarrow \varepsilon = 1-\frac{r_{perielio}}{a} \approx 1-\frac{87.810^{9}}{2.6410^{12}} \approx 1-33.310^{-3} \approx 0.967$$

$$\rightarrow r_{afelio} = (1+\varepsilon)a \approx 1.967 \cdot 2.6410^{12}m \approx 5.1910^{12}m$$

Quindi l'orbita e' quasi una parabola..

14-5) Dai seguenti dati orbitali sui principali satelliti di Giove (i “Pianeti Medicei” scoperti da Galilei), trovare la massa di Giove, assumendo per semplicita’ orbite circolari

Nome	R(km)	T(giorni)
Io	421800	1.77
Europa	671100	3.55
Ganymede	1070400	7.16
Callisto	1882700	16.69

$$T^2 \simeq \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

$$\to M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{G} \approx \frac{40}{6.6710^{-11}} \approx 610^{11}\, Nm^2kg^{-2}$$

Ci si attende lo stesso valore per tutti e quattro i satelliti:

$$M_G^{(Io)} = \frac{4\pi^2}{G}\left(\frac{a^3}{T^2}\right)^{(Io)} \approx 610^{11}\frac{\left(4.2210^8\right)^3}{\left(1.77\cdot 8.4610^4\right)^2} kg \approx 610^{11}\frac{75.210^{24}}{22410^8}$$

$$\to M_G^{(Io)} \approx \frac{45110^{35}}{22410^8} kg \approx 210^{27}\, kg$$

$$M_G^{(Europa)} = \frac{4\pi^2}{G}\left(\frac{a^3}{T^2}\right)^{(Europa)} \approx 610^{11}\frac{\left(6.7110^8\right)^3}{\left(3.55\cdot 8.4610^4\right)^2} \approx 610^{11}\frac{30210^{24}}{90210^8}$$

$$\to M_G^{(Europa)} \approx 210^{27}\, kg$$

$$M_G^{(Ganimede)} = \frac{4\pi^2}{G}\left(\frac{a^3}{T^2}\right)^{(Ganimede)}$$

etc

$$M_G^{(Callisto)} = \frac{4\pi^2}{G}\left(\frac{a^3}{T^2}\right)^{(Callisto)}$$

etc

14-6) La galassia NGC 4258 contiene un disco di materia, simile ad una versione ingigantita degli anelli di Saturno. Il raggio interno del disco, dove la materia ruota con periodo di 800 anni, e' di 0.14 parsec, il raggio esterno, per il quale il periodo di rotazione e' 2200 anni, e' 0.28 parsec.
Dedurre la presenza di un oggetto centrale molto massivo, e la sua massa

1 parsec $= 3.1\ 10^{16} m$

$\rightarrow r_{\text{int}} \approx 0.14 \cdot 3.1\ 10^{16} m = 4.34\ 10^{15} m$

$\rightarrow r_{est} \approx 0.28 \cdot 3.1\ 10^{16} m = 8.68\ 10^{15} m$

$$\rightarrow v(r_{\text{int}}) = \frac{2\pi r_{\text{int}}}{T_{\text{int}}} = \frac{6.28 \cdot 4.34\ 10^{15}}{800 \cdot 365 \cdot 8.46\ 10^4} \approx \frac{27.3\ 10^{15}}{2.47\ 10^{10}} \approx 11\ 10^5 ms^{-1}$$

$$\rightarrow v(r_{est}) = \frac{2\pi r_{est}}{T_{est}} = \frac{6.28 \cdot 8.68\ 10^{15}}{2200 \cdot 365 \cdot 8.46\ 10^4} \approx \frac{54.6\ 10^{15}}{6.79\ 10^{10}} \approx 8\ 10^5 ms^{-1}$$

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Che cosa e' M ??

$\rightarrow$ La massa totale che contribuisce al campo gravitazionale al raggio r

$\rightarrow M = M(r)$, quella contenuta entro un volume di raggio r

Modello 1:

$M(r) =$ massa del disco

$\rightarrow$ Per un disco uniforme:

$M(r) = \sigma\pi r^2, \sigma$ densita' superficiale di massa

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{G}{r}\sigma\pi r^2} = k\sqrt{r}$$

Modello 2:

$M(r) =$ massa puntiforme al centro

$M(r) = M_C$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{G}{r}M_C} = \frac{k'}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{v(r_{est})}{v(r_{\text{int}})} \approx \frac{8}{11} \approx 0.73 \sim \sqrt{\frac{r_{\text{int}}}{r_{est}}} \rightarrow v(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$\rightarrow$ Compatibile con modello 2, incompatibile con modello 1

$$v(r)\sqrt{r} = k' \rightarrow k' = 11\ 10^5 \sqrt{4.34\ 10^{15}} \approx 11\ 10^5\ \ 6.6\ 10^7 \approx 72.6\ 10^{12}$$

$$k'^2 = GM_C \rightarrow M_C \sim \frac{k'^2}{G} \approx \frac{5.27\ 10^3\ \ 10^{24}}{6.67\ 10^{-11}} \approx 0.79\ 10^{38} kg$$

$$\rightarrow \frac{M_C}{M_{sole}} \approx \frac{0.79\ 10^{38}}{2\ 10^{30}} \sim 4\ 10^7 \ !!!$$