Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 15

15-1) Un cilindro di momento di inerzia I rispetto al suo asse rotola senza strisciare giu' per un piano inclinato di angolo α. Calcolare l'accelerazione del suo CM

Conservazione dell' en. meccanica totale:

$$E = E_K + U = \text{cost}$$

$$E_K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \omega \text{ vel. angolare di rotazione attorno al CM}$$

$$U = mgh_{CM}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_{CM} = \text{cost}$$

$$\frac{dh_{CM}}{dt} = -v_{CM}\sin\alpha$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 = Mv_{CM}\frac{dv_{CM}}{dt} + I\omega\frac{d\omega}{dt} - mgv_{CM}\sin\alpha = 0, v_{CM} > 0 \rightarrow h_{CM} \searrow$$

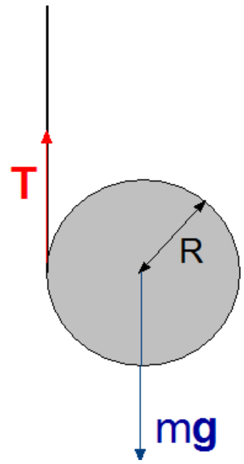
$$v_{CM} = \omega R \quad \text{puro rotolamento}$$

$$\rightarrow Mv_{CM}\frac{dv_{CM}}{dt} + I\frac{v_{CM}}{R^2}\frac{dv_{CM}}{dt} - mgv_{CM}\sin\alpha = 0$$

$$\rightarrow \left(M + \frac{I}{R^2}\right)v_{CM}\frac{dv_{CM}}{dt} - mgv_{CM}\sin\alpha = 0$$

$$\rightarrow \frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{mg\sin\alpha}{M + \frac{I}{R^2}}$$

15-2).Calcolare l’accelerazione del disco dello yo-yo in figura, considerando il filo inestensibile e privo di massa



Moto del CM:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg + T, z$$ quota del CM

Rotazione attorno al CM:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = M$$

$$M = -TR$$

$$R\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$ puro rotolamento

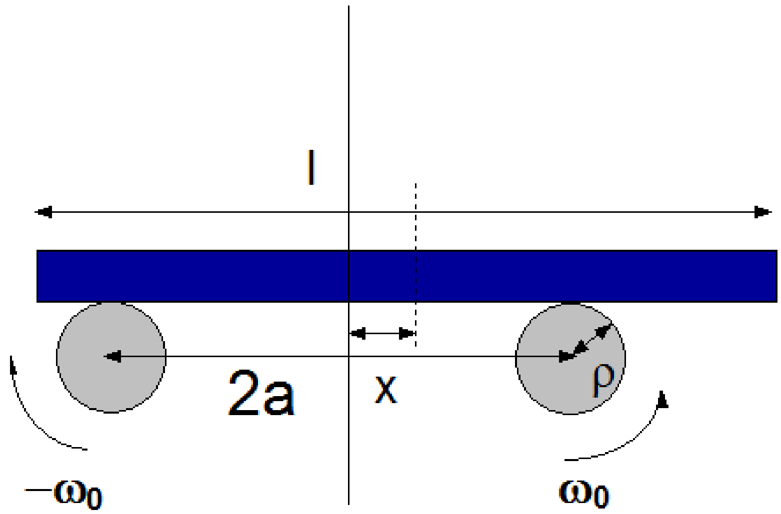
$$\rightarrow -TR = \frac{I}{R}\frac{d^2z}{dt^2} \rightarrow T = -\frac{I}{R^2}\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{I}{R^2}\frac{d^2z}{dt^2} = -mg$$

$$\rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{m}{m+\frac{I}{R^2}}g$$

$$\rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{m}{m+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{R^2}}g = -\frac{2}{3}g$$

15-3) Una sbarra di lunghezza l e massa m e' appoggiata a due rulli di raggio ρ, che ruotano con velocita' angolari ω_0 e $-\omega_0$, rispettivamente, come in figura.



La distanza fra gli assi dei rulli e' $2a<l$, e fra rulli e sbarra c'e' attrito descritto dal coefficiente μ_d per entrambi i rulli. Se $v_{sbarra} << \rho\omega_0$, studiare il moto della sbarra.

x Spostamento del CM della sbarra dalla posizione mediana

N_1, N_2 forze normali = reaz. vincolari

$N_1 + N_2 = mg$ acc. verticale sbarra nulla

$-N_1(a+x) + N_2(a-x) = 0$ rotazione sbarra nulla

$$\rightarrow \begin{cases} N_1 = \dfrac{mg}{2}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \\ N_2 = \dfrac{mg}{2}\left(1 + \dfrac{x}{a}\right) \end{cases}$$

Forza orizzontale: attrito dinamico(← Forza motrice!)

$\omega_0 > 0 : F_1 \rightarrow, F_2 \leftarrow$

$$F = F_1 + F_2 = \mu_d (N_1 - N_2) = \mu_d \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{x}{a} - 1 - \frac{x}{a}\right) = -\frac{\mu_d mgx}{a}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu_d mgx}{a}$$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu_d g}{a}x = 0$$ Eq. dei moti armonici

$$\rightarrow x(t) = A\sin\sqrt{\frac{\mu_d g}{a}}t + B\cos\sqrt{\frac{\mu_d g}{a}}t$$

$$\omega_0 < 0 : F_1 \leftarrow, F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\mu_d g}{a} x = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{i^2 \frac{\mu_d g}{a}}_{\omega_0^2} x = 0$$

$$\rightarrow x(t) = A \sin\left(i\sqrt{\frac{\mu_d g}{a}} t\right) + B \cos\left(i\sqrt{\frac{\mu_d g}{a}} t\right), \quad A, B$$ in generale complessi

$NB \qquad e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$ Formula di Eulero

$$\rightarrow \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

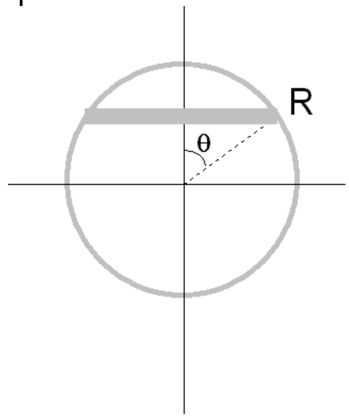
$$\rightarrow \begin{cases} \sin(i\alpha) = \dfrac{e^{i(i\alpha)} - e^{-i(i\alpha)}}{2i} = \dfrac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}{2i} = -i\dfrac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}{2} = i\dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \\ \cos(i\alpha) = \dfrac{e^{i(i\alpha)} - e^{-i(i\alpha)}}{2} = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \end{cases}$$

$$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}, \sinh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin(i\alpha) = i\dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = i \sinh\alpha \\ \cos(i\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \cosh\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow x(t) = iA \sinh\sqrt{\frac{\mu_d g}{a}} t + B \cosh\sqrt{\frac{\mu_d g}{a}} t$$ andamento non periodico

15-4) Calcolare il momento d’inerzia di un guscio sferico di massa M e raggio R rispetto ad un asse passante per il centro.



Rifacendosi al caso dell'anello:

$$I = Mr^2$$

In questo caso:

$$r = R\sin\theta, \quad dm = \sigma dA$$

$$dA = \underbrace{(2\pi R\sin\theta)}_{base}\underbrace{(Rd\theta)}_{altezza} = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$\rightarrow dm = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$dI = dmr^2 = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta R^2 \sin^2\theta$$

$$\rightarrow dI = \sigma 2\pi R^4 \sin^3\theta d\theta$$

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{4\pi R^2}$$

$$\rightarrow dI = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi R^4 \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{2} MR^2 \sin^3\theta d\theta$$

$$\rightarrow I = \int_{sfera} dI = \int_0^\pi \frac{1}{2} MR^2 \sin^3\theta d\theta$$

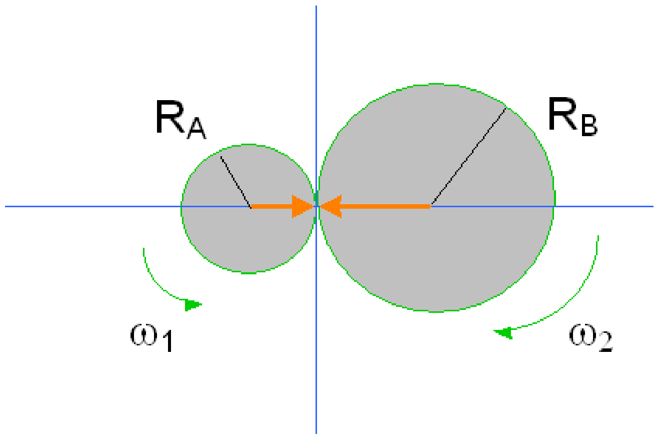
$$\rightarrow I = \frac{1}{2} MR^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{2} MR^2 \int_0^\pi \sin^2\theta \underbrace{\sin\theta d\theta}_{-d(\cos\theta)}$$

$$\rightarrow I = -\frac{1}{2} MR^2 \int_1^{-1} \sin^2\theta d(\cos\theta) = \frac{1}{2} MR^2 \int_{-1}^{+1} \left(1 - \cos^2\theta\right) d(\cos\theta)$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2} MR^2 \int_{-1}^{+1} \left(1 - x^2\right) dx = \frac{1}{2} MR^2 \left(x - \frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{+1}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2} MR^2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left((-1)^3 - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) = \frac{2}{3} MR^2$$

15-5) Due rulli con assi paralleli, raggi R_A, R_B e mom. d'inerzia I_A,I_B rispetto agli stessi assi, non sono inizialmente in contatto, mentre il rullo A ruota con vel. angolare ω_0 e il rullo B e' fermo. Successivamente i rulli vengono posti in contatto; determinare le vel. angolari finali ω_1, ω_2 in assenza di perdite.



Conservazione en. cinetica:

$$\frac{1}{2}I_A\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_A\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_2^2$$

Punti in contatto: stessa velocita' lineare

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{R}_A = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{R}_B$$

$\boldsymbol{R}_A, \boldsymbol{R}_B$: posizioni del punto di contatto rispetto ai 2 centri

$\rightarrow \boldsymbol{R}_A = -a\boldsymbol{R}_B$: paralleli, versi opposti

$$\rightarrow \omega_1 R_A = \omega_2 \left(-aR_A\right)$$

$$\rightarrow \omega_2 = -\omega_1 \frac{R_A}{R_B}$$

$\rightarrow$ Velocita' angolari: senso opposto

$$\rightarrow I_A\omega_0^2 = I_A\omega_1^2 + I_B\omega_1^2\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2$$

$$\rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2\frac{I_A}{I_A + I_B\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2}$$

$$\rightarrow \omega_1 = \omega_0\frac{1}{\sqrt{1+\frac{I_B}{I_A}\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2}}$$

$$\rightarrow \omega_2 = -\omega_1\frac{R_A}{R_B} = -\omega_0\frac{R_A}{R_B\sqrt{1+\frac{I_B}{I_A}\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2}}$$