# Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 2

2-1) Un calciatore esegue un passaggio sbagliato: il pallone viene lanciato da terra, con velocita' iniziale $v_0 = 16 ms^{-1}$ ed un angolo di $30^0$ rispetto all'orizzontale, verso un compagno di squadra che si trova ad una distanza di $33\ m$ nel piano del moto. Se il compagno vuole eseguire uno stop a terra, con quale velocita' deve correre per raggiungere il pallone partendo in sincronia?

Piano $xy$ = piano del moto

Origine = pos. iniziale del pallone

Vel. del pallone:

$$v_x(t) = v_{x0}$$

$$v_y(t) = v_{y0} - gt$$

Eq. orarie del pallone:

$$x(t) = v_{x0} t$$

$$y(t) = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminando il tempo:

$$t = \frac{x}{v_{x0}} \rightarrow y(x) = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} x^2 \quad \text{parabola}$$

$$\begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} = v_0 \sin\alpha \end{cases} \rightarrow y(x) = \tan\alpha x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 = x \left( \tan\alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x \right)$$

Gittata:

$$y = 0 \rightarrow \tan\alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x = 0 \rightarrow x_G = \frac{2 v_0^2}{g} \cos^2\alpha \tan\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \simeq 23\ m$$

Tempo di volo:

$$t_G = \frac{x_G}{v_{x0}} = \frac{x_G}{v_0 \cos\alpha} = \frac{\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha}{v_0 \cos\alpha} = \frac{2 v_0}{g} \sin\alpha \simeq 1.6\ s$$

Vel. richiesta al compagno:

$$v = \frac{d - x_G}{t_G} \simeq \frac{33 - 23}{1.6} = \frac{10}{1.6} \approx 6.6\ ms^{-1}$$

2-2) Considerando il caso di un moto armonico semplice $x(t)=A\sin\omega t$, calcolare velocita' e accelerazione istantanee; trovare la dipendenza di velocita' e accelerazione dalla posizione del punto

$$x(t)=A\sin\omega t$$

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos\omega t=\omega A\sqrt{1-\sin^2\omega t}=\omega\sqrt{A^2-A^2\sin^2\omega t}$$

$$\rightarrow v(x)=\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}$$

$$\rightarrow a(x)=-A\omega^2\sin\omega t=-\omega^2 x$$

$$v(x)=\omega\sqrt{A^2-x^2}\rightarrow v^2=\omega^2\left(A^2-x^2\right)$$

$$\rightarrow\frac{v^2}{\omega^2A^2}+\frac{x^2}{A^2}=1$$

Piano della fase: $v$ vs. $x$

$\rightarrow$ Ellisse

2-3) Calcolare il raggio di curvatura nel punto piu' alto della traiettoria di un proiettile, lanciato da terra con velocita' iniziale $v_0=20\ ms^{-1}$ ed angolo di alzo di $45^0$.

Piano $xy$ = piano del moto

Origine = pos. iniziale del punto

Vel. del punto:

$$v_x(t)=v_{x0}\rightarrow a_x(t)=0$$

$$v_y(t)=v_{y0}-gt\rightarrow a_y(t)=-g$$

Istante di max. altezza:

$$v_y(t)=v_{y0}-gt=0\rightarrow t_{\max}=\frac{v_{y0}}{g}=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

Per $t=t_{\max}$:

$$\left.\begin{array}{l}v_x=v_{x0}=v_0\cos\alpha\\ v_y=0\end{array}\right\}\rightarrow v=v_0\cos\alpha$$

$a(t_{\max})=a_N=\dfrac{v^2}{R}=g\leftarrow$ Acc. tangenziale nulla per $t=t_{\max}$

$$\rightarrow\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{R}=g$$

$$\rightarrow R=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}=\frac{20^2\,1/2}{9.81}\ m\approx 20\ m$$

2-4) Calcolare il modulo di velocita' e accelerazione istantanee di un punto le cui equazioni orarie sono:

$$x(t) = R\sin(\omega t) + \omega R t$$

$$y(t) = R\cos(\omega t) + R$$

Discutere moto e traiettoria

Traiettoria: moto circolare uniforme sovrapposto a moto rettilineo uniforme →Cicloide

$$x(t) = R\sin\omega t + \omega R t$$

$$y(t) = R\cos\omega t + R$$

$$\frac{dx}{dt} = R\omega\cos\omega t + \omega R$$

$$\frac{dy}{dt} = -R\omega\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2\sin\omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(R\omega\cos\omega t + \omega R\right)^2 + \left(-R\omega\sin\omega t\right)^2$$

$$\rightarrow v^2 = 2R^2\omega^2\left(1 + \cos\omega t\right) = 4R^2\omega^2\cos^2\frac{\omega t}{2}$$

$$\rightarrow v = 2R\omega\cos\frac{\omega t}{2}$$

$$a^2 = R^2\omega^4$$

$$\rightarrow a = \omega^2 R$$

2-5) Un cannone posto nell'origine spara proiettili con velocita' iniziale $v_0$ ed angolo di alzo $\alpha$ per colpire un bersaglio nel piano del moto le cui coordinate sono $(x_B, y_B)$, entrambe positive. Trovare l'angolo di alzo giusto e discutere la soluzione.

Eq. della parabola:

$$y(x) = x\left(\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x\right)$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

$$\rightarrow y(x) = x\left[\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)x\right]$$

Richiesta che la traiettoria passi per il punto $(x_B, y_B)$:

$$y_B = x_B\left[\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)x_B\right]$$

$\rightarrow$ Eq.di II grado per $\tan\alpha$:

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gx_B}\tan\alpha + \frac{2v_0^2 y_B}{gx_B^2} + 1 = 0$$

$$\rightarrow \tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx_B} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_B}\right)^2 - \frac{2v_0^2 y_B}{gx_B^2} - 1}$$

2 angoli (tiro diretto, tiro indiretto) quando discriminante > 0, 1 quando discr. =0, nessuno quando discr. <o (fuori tiro)

2-6) In un gioco da fiera un fucile ad aria compressa spara per colpire una pallina situata nel punto $(x_0, y_0)$, che viene rilasciata da ferma nell'istante dello sparo. Trovare un criterio per colpire sempre la pallina.

Criterio: mirare sempre alla pallina