Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 3

3-1) Un'auto di massa $m = 1500\ kg$ che viaggia con velocita' costante $v = 60\ kmh^{-1}$ inizia a frenare con decelerazione costante, e si ferma in $72\ s$. Trovare la forza applicata all'auto.

$$v(t) = v_0 - at$$

$$\rightarrow t_{stop} = \frac{v_0}{a}$$

$$\rightarrow a = \frac{v_0}{t_{stop}}$$

$$\rightarrow F = ma = \frac{mv_0}{t_{stop}} = \frac{1.510^3\,6010^3/3.610^3}{72} = \frac{9010^3}{72\cdot 3.6} = 347\ N$$

Alternativamente:

$$F\Delta t = \Delta p \rightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad etc$$

3-2) Un corpo di massa $m = 10\ g$ cade da un'altezza di $3\ m$ su un mucchio di sabbia, penetrando per $3\ cm$ prima di arrestarsi. Qual e' la forza media che la sabbia ha esercitato sul corpo?

Moto nella sabbia:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = v_0 - at$$

$$\rightarrow t_{stop} = \frac{v_0}{a}$$

$$\rightarrow x_{stop} = v_0 t_{stop} - \frac{1}{2}at_{stop}^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2}a\frac{v_0^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{x_{stop}}$$

$$v_0^2 = 2gh$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{2}\frac{2gh}{x_{stop}} = \frac{gh}{x_{stop}} \rightarrow F = \frac{mgh}{x_{stop}}$$

3-3) Un corpo di massa m si muove lungo l'asse x secondo l'eq. oraria $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$. Trovare la forza che agisce sul corpo in funzione della posizione

$$
\begin{aligned}
&x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)\\
&\rightarrow \frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)\\
&\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2 x(t)\\
&\rightarrow F(x)=-\omega^2 mx
\end{aligned}
$$

3-4) Un corpo inizialmente in quiete nella posizione x_0 si muove in linea retta sotto l'azione di una forza $F(x)=-\dfrac{K}{x^2}$. Mostrare che la velocita' nella posizione x vale $v(x)=\sqrt{\dfrac{2K}{m}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right)}$

$$
\begin{aligned}
&F(x)=-\frac{K}{x^2}\\
&\rightarrow \frac{dv}{dt}=-\frac{K}{mx^2}\\
&\rightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v=-\frac{K}{mx^2}\\
&\rightarrow vdv=-\frac{K}{mx^2}dx\\
&\rightarrow \int_{v_0}^{v} v'dv'=-\int_{x_0}^{x}\frac{K}{mx'^2}dx'\\
&\rightarrow \frac{1}{2}v^2=\left(-\frac{K}{m}\right)\left(-\frac{1}{x'}\right)_{x_0}^{x}=\frac{K}{m}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)\\
&\rightarrow v(x)=\sqrt{\frac{2K}{m}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}
\end{aligned}
$$

3-5) Un corpo di massa m, inizialmente fermo, si muove sotto l'azione di una forza $F(t) = A + Bt^2$ durante un intervallo Δt. Trovare la velocita' del corpo alla fine dell'intervallo.

$$F(t) = A + Bt^2$$
$$F(t)dt = dp$$
$$\rightarrow \Delta p = \int_0^t F(t')dt' = \int_0^t \left(A + Bt'^2\right)dt'$$
$$\rightarrow \Delta p = At + \frac{B}{3}t^3$$

3-6) Il razzo V2 aveva una massa di 13 T e la sua spinta iniziale era di circa 260000 N. Se i motori restavano accesi per 1 minuto, nell'ipotesi poco realistica di spinta e massa costanti e senza resistenza dell'aria, a quale altezza saliva il razzo? Si puo' trascurare la forza di gravita'?

$$a_{mot} = \frac{F}{m} = \frac{2.610^5}{1.310^4} = \frac{26}{1.3} = 20 \approx 2g$$
$\rightarrow$ La forza di gravita' non si puo' trascurare
$$\rightarrow a = a_{mot} - g$$
$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(a_{mot} - g)t^2 \approx \frac{1}{2}gt^2$$
$$\rightarrow x(t = 1\min)) \approx \frac{1}{2}gt^2 = \frac{10}{2}3.610^3 m = 18\ km$$

3-7) Un elettrone di massa 9.1 10^{-31} kg esce da un cannone elettronico con velocita' orizzontale 1.2 10^7 ms^{-1}, ed entra in una regione lunga 3 cm nella quale subisce una forza costante diretta verso l'alto di 4.5 10^{-15} N. Determinare lo spostamento verticale subito dall'elettrone all'uscita dalla regione.

Origine nel punto di uscita dal cannone

Eq.orarie:

$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{2}at^2 \\ x(t) = v_0 t \end{cases} \rightarrow t = \frac{x}{v_0} \rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\frac{a}{v_0^2}x^2$$

$$a = \frac{F}{m} \rightarrow y(x) = \frac{F}{2mv_0^2}x^2$$

$$\rightarrow y(d) = \frac{F}{2mv_0^2}d^2 = \frac{4.510^{-15}}{2\cdot 9.1\cdot 10^{-31}\left(1.210^7\right)^2}\left(310^{-2}\right)^2 = \frac{4.510^{-15}910^{-4}}{2\cdot 9.1\cdot 10^{-31}1.4410^{14}}$$

$$\rightarrow y(d) = 1.510^{-2}m = 1.5\ cm$$