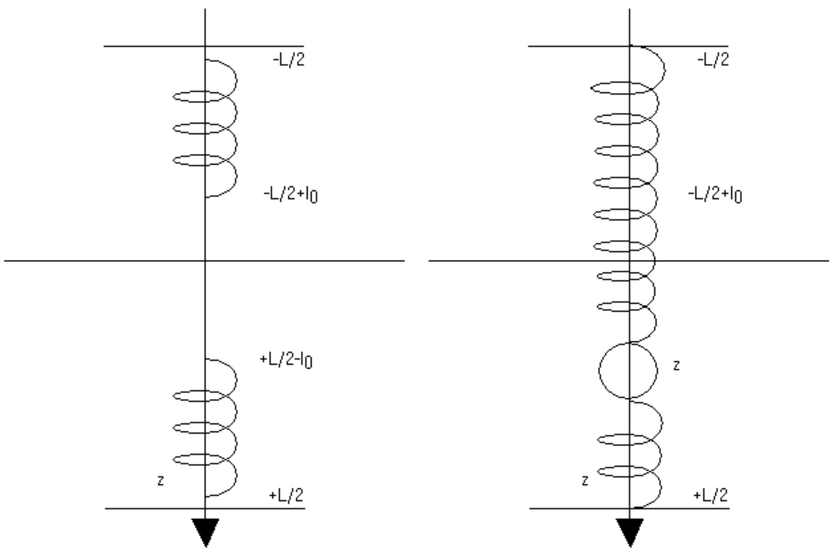
Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 5

5-1) Una massa m e' attaccata a due molle identiche, fissate a soffitto e pavimento a distanza L; la lunghezza di riposo delle molle e' l_0 e la costante elastica k.
Determinare il moto della massa quando e' rilasciata da ferma nella posizione a meta' altezza



Riferimento:

Asse z verticale, origine a meta' altezza, direzione positiva verso il basso

$z_1 = -\frac{L}{2} + l_0, z_2 = \frac{L}{2} - l_0$ Posizioni degli estremi liberi a riposo

Forze sulla massa quando e' a una quota z:

$$F_1 = -k(z - z_1) = -k\left(z - \left(-\frac{L}{2} + l_0\right)\right)$$

$$F_2 = -k(z - z_2) = -k\left(z - \left(+\frac{L}{2} - l_0\right)\right)$$

mg

$\rightarrow F = mg - 2kz$

Posizione di equilibrio:

$$F = 0 \rightarrow \bar{z} = \frac{mg}{2k}$$

Eq. del moto:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{\omega^2} z = g$$

Eq. differenziale del II ordine, lineare, non omogenea

Sol. part. non omogenea:

$$\rightarrow z(t) = \bar{z}$$

Sol. gen. omogenea:

$$z(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$\rightarrow$ Sol. gen. non omogenea:

$$z(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{mg}{2k}$$

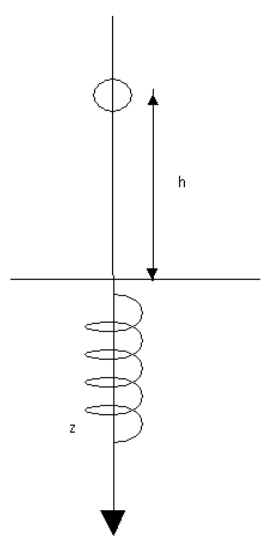
Cond. iniziali:

$$z(0) = 0 \rightarrow A + \frac{mg}{2k} = 0 \rightarrow A = -\frac{mg}{2k}$$

$$\frac{dz}{dt}(0) = 0 \rightarrow -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) = B\omega = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\rightarrow z(t) = -\frac{mg}{2k}\cos\omega t + \frac{mg}{2k} = \frac{mg}{2k}(1 - \cos\omega t)$$

5-2) Una massa m e' lasciata cadere da un'altezza h su una molla in posizione di riposo, di costante elastica k. Determinare il moto della massa nell'intervallo di tempo in cui rimane in contatto con la molla.



Asse z verticale, origine nell'estremo superiore della molla a riposo

Vel. di arrivo sulla molla:

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

Eq. del moto:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - \frac{k}{m} z$$

$$\rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\rightarrow z(t) = \frac{mg}{k} + A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Cond. iniziali:

$$z(0) = 0 \rightarrow \frac{mg}{k} + B = 0 \rightarrow B = -\frac{mg}{k}$$

$$\frac{dz}{dt}(0) = v_0 \rightarrow A\omega = v_0 \rightarrow A = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\rightarrow z(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos \omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

5-3) Una massa $m = 1\ kg$ e' attaccata a una fune di lunghezza $R = 0.6\ m$ e ruota in un piano verticale con velocita' angolare costante a frequenza *ν = 1 Hz*. Calcolare la tensione nella fune quando la massa si trova nel punto piu' basso, nel punto piu' alto e quando la fune e' orizzontale.

$$mg = 9.81 N$$

$$\omega = 2\pi \ rad \ s^{-1}$$

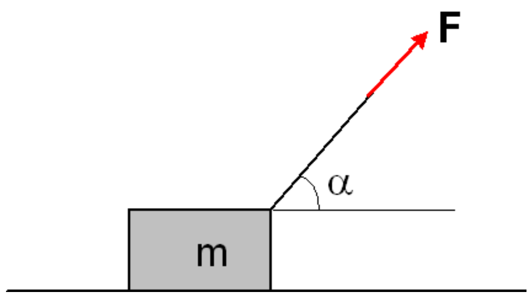
$$m\omega^2 R = 23.7 N$$

$$\theta = 0: \quad m\omega^2 R = -mg + T(0) \rightarrow T(0) = m\omega^2 R + mg = 33.5 \ N$$

$$\theta = \pi: \ m\omega^2 R = mg + T(\pi) \rightarrow T(\pi) = m\omega^2 R - mg = 13.9 \ N$$

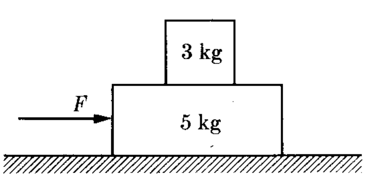
$$\theta = \frac{\pi}{2}: \ m\omega^2 R = T\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow T\left(\frac{\pi}{2}\right) = m\omega^2 R = 23.7 \ N$$

5-4) Un ragazzo tira una slitta di massa $m = 2\ kg$ con un forza *F = 10 N* inclinata di 45^0 sull'orizzontale; il coefficiente di attrito fra slitta e pavimento e' μ = 0.1. Calcolare l'accelerazione del sistema



$$\boldsymbol{F}_{tot} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_a$$
$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}$$
$$F_{tot}^{x} = T_x - F_a = T_x - \mu N = ma$$
$$F_{tot}^{y} = T_y + N - mg = 0$$
$$\rightarrow N = mg - T_y = mg - F\sin\alpha$$
$$\rightarrow F_{tot}^{x} = F\cos\alpha - F_a = F\cos\alpha - \mu N$$
$$\rightarrow F_{tot}^{x} = F\cos\alpha - \mu\left(mg - F\sin\alpha\right) = ma$$
$$\rightarrow a = \frac{F\cos\alpha - \mu\left(mg - F\sin\alpha\right)}{m} = \frac{F\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right) - \mu mg}{m}$$
$$\rightarrow a = \frac{10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.1\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0.1\cdot 2\cdot 9.81}{2} ms^{-2}$$
$$\rightarrow a = \frac{10\cdot 0.707\left(1 + 0.1\right) - 0.2\cdot 9.81}{2} ms^{-2} = 2.90\ ms^{-2}$$

5-5) Fra i due blocchi c'e' attrito statico con coefficiente $\mu_s=0.2$, e dinamico con coefficiente $\mu_d=0.1$; fra m_1 e pavimento non c'e' attrito. Qual e' la max. forza che si puo' applicare a uno dei due blocchi perche' scivolino insieme? Trovare l'accelerazione di m_1 quando una forza superiore a F_{max} e' applicata a m_1 o a m_2



$m_1 = 3kg, m_2 = 5kg$

Se si muovono assieme:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

In questo caso:

$$F_1 = am_1 = F\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Forza di attrito statico (relativo) fra m_1 e m_2:

$F_a = \mu_s m_1 g$

Perche' non ci sia moto relativo fra m_1 e m_2:

$$\rightarrow F_a \geq F_1 = F\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\rightarrow \mu_s m_1 g \geq F\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\rightarrow F \leq \mu_s g\left(m_1 + m_2\right) = 0.2 \cdot 9.81 \cdot \left(3 + 5\right) = 15.7N$$

$$\rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{\mu_s g\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 + m_2} = \mu_s g = 0.2g = 1.96ms^{-2}$$

Stesso risultato se la forza e' applicata a m_2

$F > \mu_s g\left(m_1 + m_2\right)$ applicata a m_2

$F_a = \mu_d g m_1$

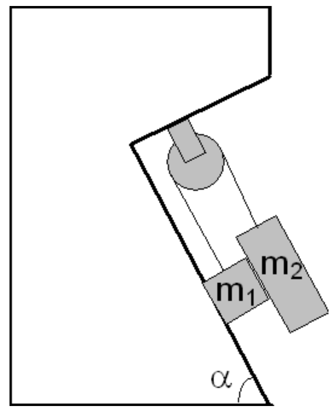
$$a_1 = \frac{F_a}{m_1} = \frac{\mu_d g m_1}{m_1} = \mu_d g = 0.98\ ms^{-2}$$

$F > \mu_s g\left(m_1 + m_2\right)$ applicata a m_1

$F_a = \mu_d g m_1$

$$a_1 = \frac{F - F_a}{m_1} = \frac{F - \mu_d g m_1}{m_1} = \frac{F}{m_1} - \mu_d g$$

5-6) Per il sistema in figura, il coefficiente di attrito e' μ per ogni coppia di superfici. Calcolare l'accelerazione delle masse.



a positiva quando m_1 scende e m_2 sale

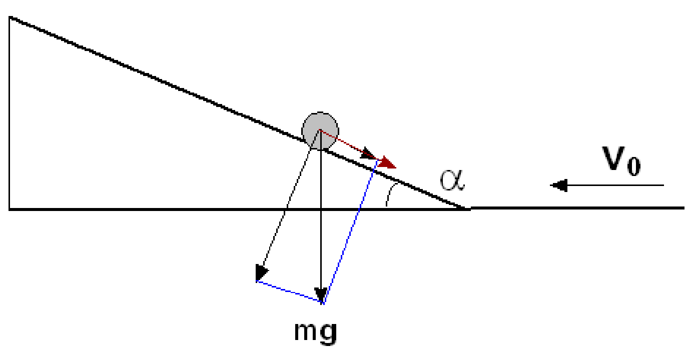
Attrito su 2 facce:

$$m_1 g \sin\alpha - T - (m_1 + m_2) g\mu\cos\alpha - m_2 g\mu\cos\alpha = m_1 a$$

$$-m_2 g \sin\alpha + T - m_2 g\mu\cos\alpha = m_2 a$$

$$\rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g\sin\alpha - \frac{(m_1 + 3m_2)}{(m_1 + m_2)} g\mu\cos\alpha$$

5-7) Un blocco di massa m arriva con velocita' v_0 orizzontale all'inizio di un piano inclinato molto lungo, di angolo α; fra blocco e piano c'e' attrito con coefficiente μ. Determinare se il blocco ritorna sul piano orizzontale o se si arresta prima.



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_a$$

$$F_x = -mg\sin\alpha - \mu N, t < t_1 \quad \text{istante di arresto momentaneo}$$

$$F_y = -mg\cos\alpha + N$$

$$F_y = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha \rightarrow \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

$$\rightarrow F_x = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 - (g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)t, \quad 0 < t < t_1$$

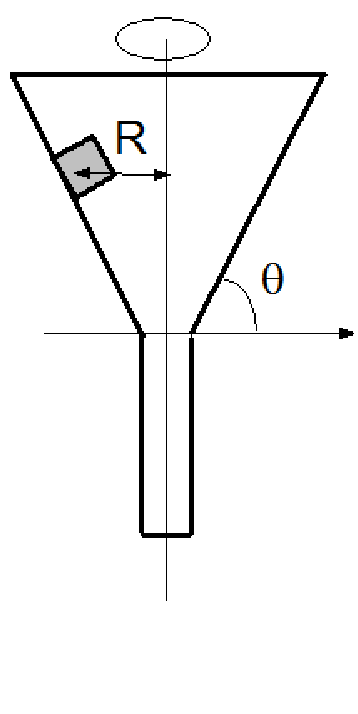
$$\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow t = t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)t, t > t_1$$

$$\tan\alpha > \mu : \text{ discesa con velocita' crescente}$$

$$\tan\alpha < \mu : \text{ arresto alla sommita'}$$

5-8) Un imbuto ruota attorno al suo asse con velocita' angolare costante ω. Un piccolo blocco di massa m si trova a distanza R dall'asse, appoggiato alla parete con un coeffieciente di attrito μ. Trovare i valori di ω massima e minima perche' il blocco non si muova



Lungo la generatrice del cono:
componenti longitudinali di forza peso e forza centripeta

$$\underbrace{mg\sin\theta}_{\text{peso}} \pm \underbrace{F_a}_{\text{attrito}} = \underbrace{m\omega^2 R\cos\theta}_{\text{f.centripeta}}$$

$$F_a = \mu N = \mu\left(mg\cos\theta + m\omega^2 R\sin\theta\right)$$

$$\to mg\sin\theta \pm \mu\left(mg\cos\theta + m\omega^2 R\sin\theta\right) = m\omega^2 R\cos\theta$$

$$\to \omega^2 R\cos\theta \mp \mu\omega^2 R\sin\theta = g\sin\theta \pm \mu g\cos\theta$$

$$\to \omega\sqrt{R\left(\cos\theta \mp \mu\sin\theta\right)} = \sqrt{g\left(\sin\theta \pm \mu\cos\theta\right)}$$

$$\to \omega = \sqrt{\frac{g\left(\sin\theta \pm \mu\cos\theta\right)}{R\left(\cos\theta \mp \mu\sin\theta\right)}}$$

Due condizioni di equilibrio: corrispondono ai casi in cui la vel. angolare di equilibrio viene raggiunta salendo da valori minori ($\leftarrow$ il blocco risale verso l'esterno, f.attrito concorde alla forza peso), o scendendo da valori maggiori ($\leftarrow$ il blocco scivola verso l'interno, f.attrito discorde alla forza peso)