Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 6

6-1) Un furgone di massa 1600 kg viaggia a velocita' costante di $60\ kmh^{-1}$ su una salita inclinata di 3^0 sull'orizzontale. Trascurando gli attriti, qual e' la potenza sviluppata dal motore? Qual e' il lavoro effettuato in in $10\ s$?

$$F = mg\sin\alpha$$
$$Fv = mgv\sin\alpha = 1600\cdot 9.81\cdot 16.7\cdot 0.052 = 13.7\ 10^3\ W$$
$$W = 13.7 10^3\cdot 10 = 1.37\ 10^5\ J$$

6-2) Una biglia di acciaio di massa $m = 1\ kg$ gira con velocita' angolare costante $\omega = 120\ rad\ s^{-1}$ e raggio $R = 1\ m$ nel piano verticale; calcolarne l'energia cinetica. Se l'en. totale rimane costante, invece della velocita' angolare, calcolare la variazione di en. cinetica e di vel. angolare fra le posizioni alla sommita' e al fondo della circonferenza.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = \frac{1}{2}1(120)^2 1\ J = \frac{14400}{2}\ J = 7200\ J$$
$$E = E_k + U$$
$$\left.\begin{aligned} E_k(up) &= E - mg2R \\ E_k(down) &= E \end{aligned}\right\} \to \Delta E_k = -2mgR = -2\cdot 9.81 = -19.6\ J$$
$$\left.\begin{aligned} E_k(up) &= \frac{1}{2}m\omega_{up}^2R^2 \\ E_k(down) &= \frac{1}{2}m\omega_{down}^2R^2 \end{aligned}\right\} \to \Delta E_k = \frac{1}{2}mR^2\left(\omega_{up}^2 - \omega_{down}^2\right)$$
$$\to -2mgR = \frac{1}{2}mR^2\left(\omega_{up}^2 - \omega_{down}^2\right) \to \frac{4g}{R} = \omega_{down}^2 - \omega_{up}^2$$
$$\to \omega_{down} = \sqrt{\frac{4g}{R} + \omega_{up}^2} \to \Delta\omega = \omega_{down} - \omega_{up} = \sqrt{\frac{4g}{R} + \omega_{up}^2} - \omega_{up}$$
$$\to \Delta\omega = \sqrt{\frac{4\cdot 9.81}{1} + 1.44\ 10^4} - 120 \approx 0.16\ rads^{-1}$$

6-3) Un corpo di massa m scivola lungo un piano inclinato, liscio per un tratto L e poi scabro con coefficiente di attrito dinamico μ. A quale condizione deve soddisfare l'angolo di inclinazione α perche' il corpo dopo un certo percorso sia fermo? In queste condizioni, qual e' la distanza percorsa?

$$v(t) = g\sin\alpha t \qquad 0 < x < L$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{2} g\sin\alpha t^2; x = L \rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}}$$

$$\rightarrow v(\bar{t}) = g\sin\alpha\sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}} = \sqrt{2Lg\sin\alpha} = v_0$$

$$v(t) = v_0 + g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t \quad x > L$$

$$v(t) = 0 \rightarrow v_0 + g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t = 0$$

$$\rightarrow v_0 = -g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)t$$

Sol. > 0 esiste se $\mu > \tan\alpha$

Usiamo il teorema del lavoro e dell'en.cinetica:

$$W = \Delta E_k = 0$$

$$\rightarrow W(gravita') + W(attrito) = 0$$

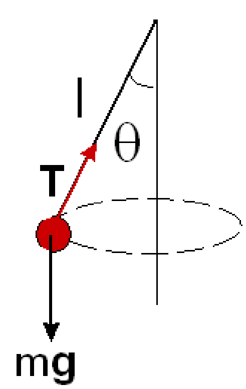
$$\rightarrow mg\sin\alpha(L + L') - \mu mg\cos\alpha L' = 0$$

$$\rightarrow \sin\alpha(L + L') = \mu\cos\alpha L'$$

$$\rightarrow L\tan\alpha = (\mu - \tan\alpha)L'$$

$$\rightarrow L' = L\frac{\tan\alpha}{\mu - \tan\alpha} \rightarrow D = L + L' = L\left(1 + \frac{\tan\alpha}{\mu - \tan\alpha}\right)$$

6-4) Un pendolo conico, $m = 2\ kg$ e $l = 0.5\ m$, ruota con vel. angolare $\omega_1 = 5\ rad\ s^{-1}$ La vel. angolare viene portata a $\omega_2 = 8\ rad\ s^{-1}$. Calcolare la variazione di energia del pendolo.



$$T\sin\theta = m\omega^2 r \rightarrow T = \frac{m\omega^2 r}{\sin\theta}$$

$$T\cos\theta = mg \rightarrow \frac{m\omega^2 r}{\sin\theta} = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\rightarrow \omega^2 r = \omega^2 l\sin\theta = g\tan\theta$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}} \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l\cos\theta} \rightarrow \cos\theta = \frac{g}{l\omega^2} \rightarrow \cos^2\theta = \frac{g^2}{l^2\omega^4}$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\omega l\sin\theta\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2\left(1 - \frac{g^2}{l^2\omega^4}\right)$$

$$\rightarrow E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2\left(\frac{l^2\omega^4 - g^2}{l^2\omega^4}\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega^4 l^2 - g^2}{\omega^2}\right)$$

$$\rightarrow \Delta E_k = \ldots$$

$$U = mgh = mgl\left(1 - \cos\theta\right) = mgl\left(1 - \frac{g}{l\omega^2}\right) = m\left(\frac{g\omega^2 l - g^2}{\omega^2}\right)$$

$$\rightarrow \Delta U = \ldots$$

6-5) Un blocco, posto su un piano scabro (coefficiente di attrito μ) ed attaccato ad una molla di costante elastica k, parte dalla posizione di riposo con velocita' iniziale v_0. A quale distanza l dalla posizione di riposo si ferma?

Lavoro della forza di attrito:

$W_a = F_a l = -mg\mu l$ lavoro resistente

Lavoro della forza elastica:

$W_e = -\frac{1}{2}kl^2$ lavoro resistente

$$\Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\rightarrow \Delta E_k = W_a + W \rightarrow -\frac{1}{2}mv_0^2 = -mg\mu l - \frac{1}{2}kl^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}kl^2 + mg\mu l - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 \rightarrow l^2 + \frac{2mg\mu}{k}l - \frac{mv_0^2}{k} = 0$$

$\rightarrow l = -\frac{mg\mu}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg\mu}{k}\right)^2 + \frac{mv_0^2}{k}} \rightarrow$ Sol. positiva

6-6) Un blocco di massa $m = 3.57\ kg$ viene trascinato sul pavimento a velocita' costante per una distanza $d = 4.06$ m, da una fune che esercita una forza $F = 7.68\ N$ ad un angolo $\alpha = 15^0$ sull'orizzontale. Calcolare il lavoro totale fatto sul blocco, quello fatto dalla fune, quello fatto dall'attrito, il coefficente di attrito.

$$a) W_{tot} = \Delta E_k = 0$$
$$b) W_{fune} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\alpha = 7.68 \cdot 4.06 \cdot 0.966 = 30.1 \quad J$$
$$c) W_{tot} = 0 \rightarrow W_{fune} = -W_{attr} \rightarrow W_{attr} = -30.1 \quad J$$
$$d) W_{attr} = -F_{attr} s = (-mg + F\sin\alpha)\mu s$$
$$\rightarrow \mu = \frac{W_{attr}}{(F\sin\alpha - mg)\mu s} = \frac{-30.1}{(7.68 \cdot 0.26 - 3.57 \cdot 9.81) \cdot 4.06} \approx 0.22$$

6-7) Un punto materiale e' soggetto alla forza $\boldsymbol{F} = (y^2 - x^2)\hat{\boldsymbol{i}} + 3xy\hat{\boldsymbol{j}}$. Il punto si muove dalla posizione A=(0,0) alla posizione B=(2,4) lungo i seguenti cammini:

$(0,0) \rightarrow (2,0)$ lungo x, $(2,0) \rightarrow (2,4)$ lungo y

$(0,0) \rightarrow (0,4)$ lungo y, $(0,4) \rightarrow (2,4)$ lungo x

lungo la retta da $(0,0) \rightarrow (2,4)$

lungo la parabola $y = x^2$ da $(0,0) \rightarrow (2,4)$

La forza e' conservativa?

$$\boldsymbol{F} = (y^2 - x^2)\hat{\boldsymbol{i}} + 3xy\hat{\boldsymbol{j}}$$
$$d\boldsymbol{r} = dx\hat{\boldsymbol{i}} + dy\hat{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = (y^2 - x^2)dx + 3xydy$$
$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^2 (y^2 - x^2)\Big|_{y=0} dx + \int_0^4 3xy\Big|_{x=2} dy = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 3 \cdot 2\frac{1}{2}y^2\Big|_0^4 = -\frac{8}{3} + 48$$
$$= \frac{144 - 8}{3} = \frac{136}{3} \approx 45.3$$
$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^4 3xydy + \int_0^2 (y^2 - x^2)dx = 16x\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 32 - \frac{8}{3}$$
$$= \frac{96 - 8}{3} = \frac{88}{3} \approx 29.3$$

La forza non e' conservativa