Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 7

7-1) Un oggetto, appeso a una molla verticale, viene abbassato lentamente dalla posizione di riposo della molla fino alla posizione di equilibrio: la molla si allunga della quantita' d. Se lo stesso oggetto viene lasciato cadere da fermo dalla stessa posizione iniziale, di quanto si allunga la molla?

Primo caso:

Posizione di equilibrio:

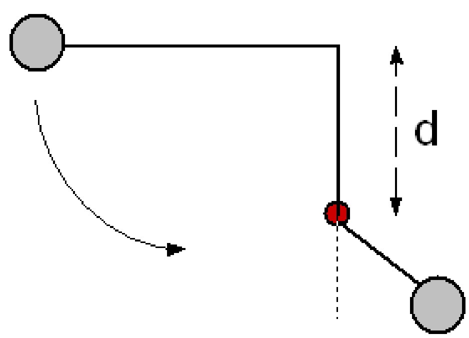
$$mg = kd \rightarrow k = \frac{mg}{d}$$

Secondo caso:

$$mgd' = \frac{1}{2}kd'^2$$

$$\rightarrow d' = \frac{2mg}{k} = 2d$$

7-2) Il chiodo della figura e' fissato a una distanza d sotto il punto di sospensione. Quale e' il valore minimo di d che assicura al peso la possibilita' di fare un giro completo attorno al chiodo?



$$mgl = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg2(l-d) + \frac{1}{2}mv'^2$$

Valore minimo:

$$a_c = \frac{v'^2}{l-d} = g \rightarrow v'^2 = g(l-d)$$

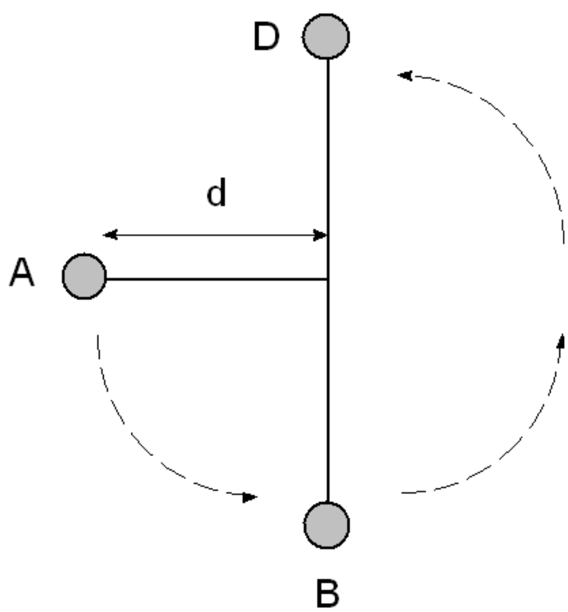
$$\rightarrow mgl = 2mg(l-d) + \frac{1}{2}mv'^2 = 2mg(l-d) + \frac{1}{2}mg(l-d)$$

$$\rightarrow mgl = \frac{5}{2}mg(l-d)$$

$$\rightarrow l = \frac{5}{2}(l-d) \rightarrow \frac{5}{2}d = \frac{5}{2}l - l = \frac{3}{2}l$$

$$\rightarrow d = \frac{3}{5}l$$

7-3) La sfera, collegata al centro tramite un’asta rigida, priva di massa e di lunghezza *l,* e imperniata senza attrito, parte dalla posizione *A* con velocita’ diretta verso il basso. La sfera arriva nel punto *D* con velocita’ nulla. Trovare la velocita’ iniziale, e la tensione dell’asta quando la sfera e’ in *B*. Tenendo conto ora delle forze di attrito, calcolare il lavoro totale da esse compiuto quando la sfera si ferma definitivamente nella posizione *B*.



Scegliamo:

$$U(A)=0 \rightarrow U(D)=mgl$$

$$E_k(A)=\frac{1}{2}mv_0^2, E_k(D)=0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2=mgl \rightarrow v_0=\sqrt{2gl}$$

$$E_k(B)=\frac{1}{2}mv_B^2, U(B)=-mgl$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_B^2-mgl$$

$$\rightarrow v_B=\sqrt{v_0^2+2gl}$$

$$\rightarrow a_C(B)=\frac{v_B^2}{l}=\frac{v_0^2}{l}+2g \rightarrow F_C=m\left(\frac{v_0^2}{l}+2g\right)$$

$$F_C=T-mg \rightarrow T=\frac{mv_0^2}{l}+2mg+mg=\frac{mv_0^2}{l}+3mg$$

7-4) La forza elettrostatica fra elettrone e nucleo nell'atomo di H si scrive $F=k\frac{e^2}{r^2}$

Un elettrone su un'orbita circolare di raggio r_1 salta istantaneamente su un'altra orbita circolare di raggio $r_2<r_1$. Calcolare la variazione di energia cinetica dell'elettrone.

$$F_1=m\frac{v_1^2}{r_1}=k\frac{e^2}{r_1^2} \rightarrow mv_1^2=k\frac{e^2}{r_1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2=\frac{k}{2}\frac{e^2}{r_1}=E_{k1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2=\frac{k}{2}\frac{e^2}{r_2}=E_{k2}$$

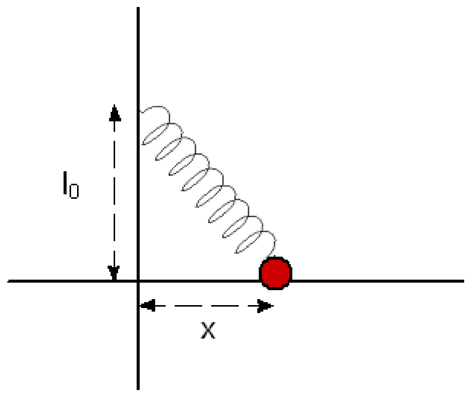
$$\rightarrow \Delta E_k=E_{k2}-E_{k1}=\frac{ke^2}{2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

7-5) Per un pendolo semplice di lunghezza l, con massa m, si osserva che ha velocita' v_0 quando si trova ad un angolo θ_0. Determinare l'en. meccanica del pendolo.

$$E = U + E_k = \text{cost}$$

$$E = mgl\left(1-\cos\theta_0\right)+\frac{1}{2}mv_0^2$$

7-6) Un oggetto di massa m e' vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse x, essendo attaccato a una molla di lunghezza di riposo l_0 e costante elastica k fissata all'altro estremo al punto $(0,l_0)$. Trovare la forza che agisce sull'oggetto nella posizione x, e il limite della forza per spostamenti piccoli << l_0: in questo limite trovare l'espressione dell'energia potenziale



$$F = F_x = -k\left(l-l_0\right)\cos\alpha$$

$$l - l_0 = \sqrt{x^2+l_0^2}-l_0$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+l_0^2}}$$

$$\rightarrow F\left(x\right) = -k\left(\sqrt{x^2+l_0^2}-l_0\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+l_0^2}} = -k\,\frac{x\left(\sqrt{x^2+l_0^2}-l_0\right)}{\sqrt{x^2+l_0^2}}$$

$$\rightarrow F\left(x\right) = -\frac{kx}{l_0\sqrt{\frac{x^2}{l_0^2}+1}}\,l_0\left(\sqrt{\frac{x^2}{l_0^2}+1}-1\right)$$

$$\rightarrow F(x) = -kx\left(1-\left(\frac{x^2}{l_0^2}+1\right)^{-1/2}\right)$$

Limite di $x \ll l_0$:

$$\left(1+\frac{x^2}{l_0^2}\right)^{1/2} \approx 1+\frac{x^2}{2l_0^2} \rightarrow \left(1+\frac{x^2}{l_0^2}\right)^{-1/2} \approx \left(1+\frac{x^2}{2l_0^2}\right)^{-1}$$

$$\rightarrow F(x) \approx -kx\left(1-\left(\frac{x^2}{2l_0^2}+1\right)^{-1}\right) \approx -kx\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2l_0^2}\right)\right)$$

$$\rightarrow F(x) \approx -kx\frac{x^2}{2l_0^2} = -\frac{k}{2l_0^2}x^3$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \approx -\frac{k}{2l_0^2}x^3$$

$$\rightarrow U(x) = -\int_0^x -\frac{k}{2l_0^2}x^3 dx = \frac{k}{2l_0^2}\frac{x^4}{4} = \frac{k}{8l_0^2}x^4$$

7-7) Un punto materiale di massa m percorre con velocita' v_1 costante una circonferenza di raggio r_1 su un piano orizzontale liscio. Un filo con tensione T mantiene il punto sulla sua traiettoria; variando la tensione si porta il punto su un'altra orbita di raggio r_2. Determinare la velocita' v_2, e il lavoro compiuto dalla tensione nel passaggio da r_1 a r_2.

Conservazione del momento angolare:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{T} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \rightarrow \boldsymbol{L} = \text{cost}$$

$$\rightarrow L = mv_1r_1 = mv_2r_2 = L_0$$

$$v_2 = \frac{L}{mr_2} = v_1\frac{r_1}{r_2}$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$\rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2}m\left[\left(v_1\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - v_1^2\right] = \frac{1}{2}mv_1^2\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 1\right] = W_T$$

$$\rightarrow W_T = \frac{1}{2m}m^2v_1^2r_1^2\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right] = \frac{L_0^2}{2m}\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right]$$