Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 8

8-1) Un punto materiale si muove sotto l'azione di una forza derivante da una en. potenziale della seguente forma:

$$U(x,y,z) = ax^n$$
$$U(x,y,z) = by^n$$
$$U(x,y,z) = cxy$$
$$U(x,y,z) = dxyz$$

Calcolare il vettore forza come funzione della posizione in ognuno dei casi

$$\boldsymbol{F} = -grad\left[U(x,y,z)\right] = -\hat{\boldsymbol{i}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\boldsymbol{j}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$a) U(x,y,z) = ax^n$$
$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = anx^{n-1}, \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$
$$\rightarrow \boldsymbol{F} = -\hat{\boldsymbol{i}}anx^{n-1}$$
$$b) U(x,y,z) = by^n$$
$$\rightarrow \boldsymbol{F} = -\hat{\boldsymbol{j}}bny^{n-1}$$
$$c) U(x,y,z) = cxy$$
$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = cy, \frac{\partial U}{\partial y} = cx, \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$
$$\rightarrow \boldsymbol{F} = -\hat{\boldsymbol{i}}cy - \hat{\boldsymbol{j}}cx = -c\left(\hat{\boldsymbol{i}}y + \hat{\boldsymbol{j}}x\right)$$
$$d) U(x,y,z) = dxyz$$
$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = dyz, \frac{\partial U}{\partial y} = dxz, \frac{\partial U}{\partial z} = dxy$$
$$\rightarrow \boldsymbol{F} = -\hat{\boldsymbol{i}}dyz - \hat{\boldsymbol{j}}dxz - \hat{\boldsymbol{k}}dxy = -d\left(\hat{\boldsymbol{i}}yz + \hat{\boldsymbol{j}}xz + \hat{\boldsymbol{k}}xy\right)$$

8-2) Un punto materiale si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza derivante da una en. potenziale della forma $U(x)=3x^2-x^3$. Fare un grafico di U e discutere i tipi di moto possibili per diversi valori dell'en. meccanica totale E.

$$U(x)=3x^2-x^3$$

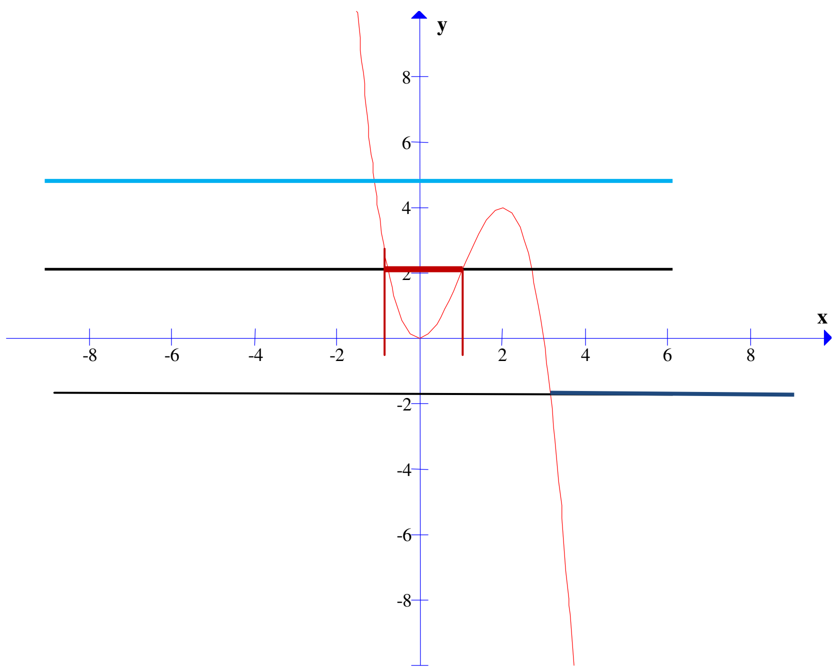
$$\frac{dU}{dx}=6x-3x^2$$

$$\rightarrow \frac{dU}{dx}=0: x=0, x=2$$

$$\rightarrow \frac{dU}{dx}>0: 6x-3x^2>0 \rightarrow x(6-3x)>0$$

$$\rightarrow x>0 \,\&\, x<2, \cancel{x<0 \,\&\, x>2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} U(x)=-\infty, \lim_{x\to-\infty} U(x)=+\infty$$



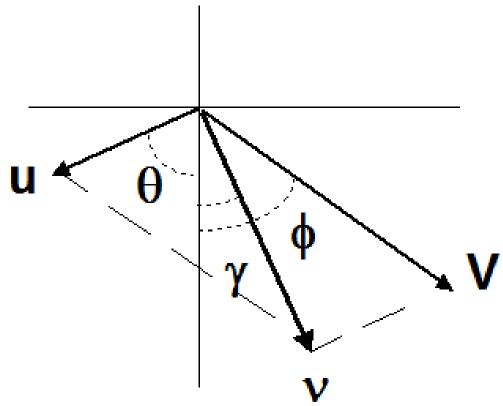
$$F=-\frac{dU}{dx}=-\left(6x-3x^2\right)$$

F attrattiva per $x<0, 0<x<2,$ repulsiva per $x>2$

$x=0$ equilibrio stabile

$x=2$ equilibrio instabile

8-3) La velocita' di un aliscafo in acqua ferma e' $55\ km\ h^{-1}$. Il pilota vuole andare ad un punto di approdo situato a $80\ km$ di distanza in direzione $S\ 20^0\ E$, in presenza di una forte corrente a $20\ km\ h^{-1}$ in direzione $S\ 70^0\ W$. Calcolare in quale direzione deve dirigersi per viaggiare in linea retta, e quanto dura il viaggio in queste condizioni



$\boldsymbol{v} =$ vel. desiderata

$\boldsymbol{u} =$ vel. corrente

$\boldsymbol{V} =$ vel. aliscafo

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{V}$

$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{V}$

$$\rightarrow |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}|^2 = V^2 = v^2 + u^2 - 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = v^2 + u^2 - 2uv\cos\alpha$$

$$\alpha = 90^0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow V^2 = v^2 + u^2 \rightarrow v^2 = V^2 - u^2$$

φ direzione aliscafo, θ direzione corrente, γ direzione voluta

$$\rightarrow \begin{cases} u_x + V_x = v_x \\ u_y + V_y = v_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v\cos\gamma = V\cos\varphi + u\cos\theta \\ v\sin\gamma = V\sin\varphi + u\sin\theta \end{cases}$$

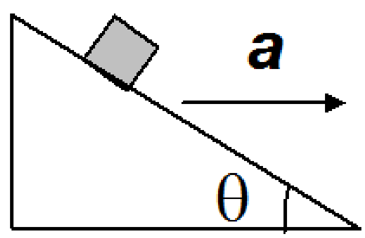
$$\rightarrow \begin{cases} v\cos\gamma - u\cos\theta = V\cos\varphi \\ v\sin\gamma - u\sin\theta = V\sin\varphi \end{cases} \rightarrow \tan\varphi = \frac{v\sin\gamma - u\sin\theta}{v\cos\gamma - u\cos\theta}$$

$$T = \frac{D}{v} = \frac{D}{\sqrt{V^2 - u^2}}$$

8-4) Un punto materiale descrive in un SRI un moto di equazione $x(t) = x_1 \sin\omega t$. Il moto viene osservato da un altro SR la cui origine, nel SRI, si muove secondo la legge $x_{O'}(t) = x_2 \sin(\omega t + \pi)$. Trovare l'accelerazione e l'eq. oraria del punto nel secondo SR.

$$x(t) = x_1 \sin\omega t$$
$$x_{O'}(t) = x_2 \sin(\omega t + \pi) = -x_2 \sin\omega t$$
$$\rightarrow u(t) = x(t) - x_{O'}(t) = x_1 \sin\omega t + x_2 \sin\omega t = (x_1 + x_2)\sin\omega t$$
$$\frac{d^2u}{dt^2} = -(x_1 + x_2)\omega^2 \sin\omega t$$

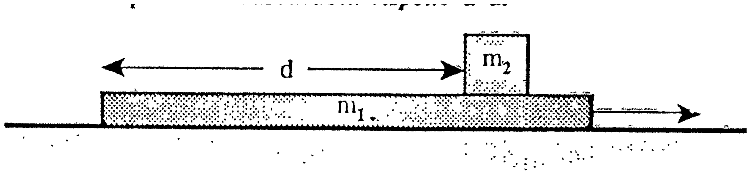
8-5) Un blocco di massa m si trova su un piano inclinato di angolo θ, che si muove con accelerazione costante a lungo l'asse x. Trovare il valore di a che assicura l'equilibrio del blocco in funzione di θ e μ (coefficiente di attrito)



SRI:

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma$$
$$\rightarrow \sin\theta - \mu\cos\theta = \frac{a}{g}$$
$$\rightarrow a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$
$$\rightarrow a = g\sin\theta\left(1 - \frac{\mu}{\tan\theta}\right)$$

8-6) Un corpo di massa m_2 e' appoggiato sopra una lastra di massa m_1, che puo' scivolare senza attrito su un piano orizzontale. Fra corpo e lastra c'e' un coefficiente di attrito μ_d. A $t = 0$ viene applicata alla lastra la forza costante $\boldsymbol{F}$, diretta come in figura. Calcolare dopo quanto tempo il corpo cade dalla lastra, se la sua distanza iniziale dal bordo e' d.



SRI :

$$F-\mu g m_2 = m_1 a_1 \rightarrow a_1 = \frac{F-\mu g m_2}{m_1}$$

$$\mu g m_2 = m_2 a_2 \rightarrow a_2 = \frac{\mu g m_2}{m_2} = \mu g$$

$\rightarrow$ Moti uniformemente accelerati

Origine delle x:

posizione bordo sinistra della lastra a $t = 0$

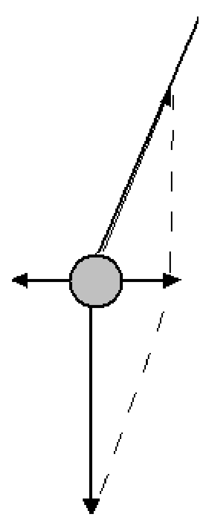
Istante di caduta: posizioni uguali

$$\rightarrow \frac{1}{2} a_1 t^2 = d + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(a_1 - a_2) t^2 = d$$

$$\rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a_1 - a_2}}$$

8-7) Un pendolo semplice di lunghezza $l = 0.4\ m$ e' appeso al soffitto di un aereo che avanza con accelerazione orizzontale $a = 5\ ms^{-2}$. Calcolare l'angolo di equilibrio e il periodo delle piccole oscillazioni



SRNI: posizione di equilibrio

Oltre alle forze solite, in questo SR c'e' una forza apparente

$$\boldsymbol{F}_a = -m\boldsymbol{a}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ma = T\sin\theta \\ mg = T\cos\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \tan\theta = \frac{a}{g}$$

$$a'^2 = a^2 + g^2$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a'}{l}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l}}$$

$$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$$