Meccanica – A.A. 2010/11

Esercizi – 9

9-1) Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme, con raggio R e frequenza angolare ω, in un SRI S. Scriverne le equazioni orarie in un SR S' in caduta libera vicino alla superficie della Terra.

In S:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\omega t \\ y(t) = R\sin\omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Trasformazioni delle coordinate da S a S':

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = z(t) - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x'(t) = R\cos\omega t \\ y'(t) = R\sin\omega t \\ z'(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

9-2) Su un pianeta con raggio e massa uguali a quelli delle Terra i corpi all'equatore si trovano in condizioni di assenza di peso. Calcolare la durata del giorno del pianeta.

$$mg = m\omega^2 R$$

$$\rightarrow g = \omega^2 R$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \approx \sqrt{\frac{9.81}{6.35\ 10^6}} \approx 1.24\ 10^{-3}\,rads^{-1}$$

$$\rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{1.24\ 10^{-3}}{6.28} \approx 0.2\ 10^{-3}\,Hz$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{\nu} \approx 5052\ s = 1.4\ h$$

9-3) Un corpo viene lanciato verso l'alto con velocita' iniziale v_0 da un punto sulla superficie terrestre a latitudine λ. Calcolare lo spostamento laterale del corpo quando ritorna sulla superficie.

Acc. di Coriolis: verso W in salita, verso E in discesa

$v_{vert}(t) \simeq v_0 - gt$ salita

$$\to t_{\max} = \frac{v_0}{g}$$

$$\to a_{orizz} \simeq 2\omega\cos\lambda v_0 - 2\omega\cos\lambda gt$$

$$\to v_{orizz} \simeq 2\omega\cos\lambda v_0 t - 2\omega\cos\lambda g\frac{1}{2}t^2$$

$$\to x(t) \simeq \omega\cos\lambda v_0 t^2 - \frac{1}{3}\omega\cos\lambda gt^3$$

$$\to x(t_{\max}) \simeq \omega\cos\lambda v_0\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{1}{3}\omega\cos\lambda g\left(\frac{v_0}{g}\right)^3$$

$$\to x(t_{\max}) \simeq \omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2} - \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2} = \frac{2}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2}$$

$$v_{orizz}(t_{\max}) \simeq 2\omega\cos\lambda v_0\frac{v_0}{g} - \omega\cos\lambda g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2$$

$$\to v_{orizz}(t_{\max}) \simeq 2\omega\cos\lambda\frac{v_0^2}{g} - \omega\cos\lambda\frac{v_0^2}{g} = \omega\cos\lambda\frac{v_0^2}{g}$$

$v_{vert}(t) \simeq -gt$ discesa; inizio discesa $t = 0$

$$\to t_{fin} = \frac{v_0}{g}$$

$$\to a_{orizz} \simeq -2\omega\cos\lambda gt$$

$$\to v_{orizz} \simeq \omega\cos\lambda\frac{v_0^2}{g} - 2\omega\cos\lambda g\frac{1}{2}t^2$$

$$\to x(t) \simeq x(t_{\max}) + \omega\cos\lambda\frac{v_0^2}{g}t - \frac{1}{3}\omega\cos\lambda gt^3$$

$$\to x(t_{fin}) \simeq x(t_{\max}) + \omega\cos\lambda\frac{v_0^2}{g}\frac{v_0}{g} - \frac{1}{3}\omega\cos\lambda g\left(\frac{v_0}{g}\right)^3$$

$$\to x(t_{fin}) \simeq \frac{2}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2} + \omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2} - \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2}$$

$$\to x(t_{fin}) \simeq \frac{4}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2}$$

9-4) Un disco orizzontale ruota con velocita' angolare costante $\omega_0 = 10\ rad\ s^{-1}$; un blocchetto posto sul disco (senza attrito) e legato al centro da un filo inestensibile e privo di massa, lungo $l = 1.5\ m$, ruota con la stessa velocita' angolare. La tensione nel filo e' $T = 15\ N$. La velocita' angolare viene ridotta a $\omega = 2\ rad\ s^{-1}$ e poi mantenuta costante: calcolare velocita' e accelerazione del blocchetto nel SR del disco, e la massa del blocchetto

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$
$$\rightarrow \omega_0 r = v' + \omega r$$
$$\rightarrow v' = (\omega_0 - \omega) r$$
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$
$$\rightarrow \omega_0^2 r = a' + \omega^2 r + 2\omega(\omega_0 - \omega) r$$
$$\rightarrow a' = \omega_0^2 r + \omega^2 r - 2\omega\omega_0 r = (\omega_0 - \omega)^2 r$$

9-5) Su una piattaforma di raggio R, rotante con velocita' angolare ω, un bambino sul bordo getta una palla a una compagna di giochi ferma al centro; la palla ha velocita' iniziale v_0. Che traiettoria segue la palla?

Forza di Coriolis:

$$\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

Sempre $\perp$ alla velocita' $\rightarrow$ Non compie lavoro

$$\rightarrow |\boldsymbol{v}| = v_0$$

$\rightarrow F = 2\omega v_0,$ laterale

Forza centrifuga:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

$\rightarrow F = \omega^2 r,$ radiale

Se $\omega^2 r \ll 2\omega v_0 \rightarrow \frac{\omega r}{2} \ll v_0$, prevale la forza di Coriolis

$\rightarrow$ Traiettoria $\sim$ arco di circonferenza

In generale, arco di spirale di Archimede...