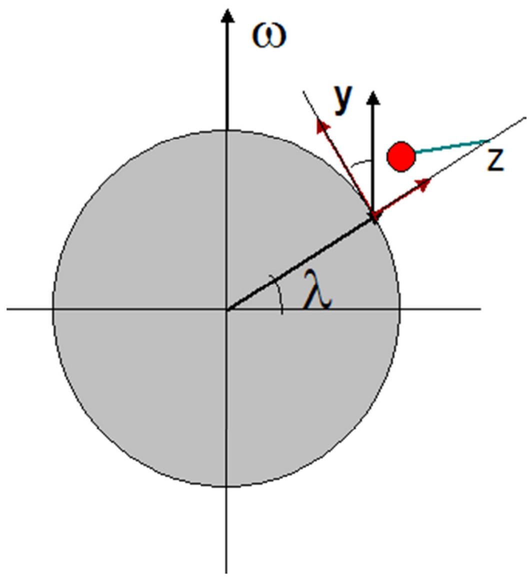
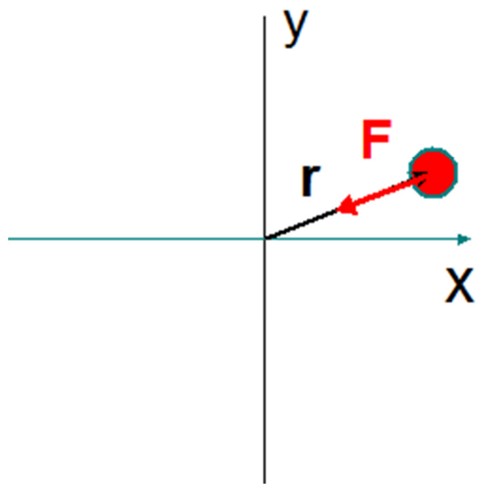
Equazione del moto per il pendolo di Foucault e soluzione

Pendolo visto dal riferimento inerziale:



Pendolo visto dal punto di sospensione:



Posizione del pendolo (approssimazione di moto piano)

$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$

Componente orizzontale della risultante di $m\mathbf{g}$ e $\mathbf{T}$:

$\mathbf{F} \simeq -m\frac{g}{l}x\hat{\mathbf{i}} - m\frac{g}{l}y\hat{\mathbf{j}}$

Forza di Coriolis ($\leftarrow$ apparente: riferimento in rotazione)

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$

Velocita' del pendolo (trascurando la componente verticale)

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}$$

Scomposizione della vel. angolare in componenti verticale e orizzontale

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\cos\lambda\hat{\mathbf{j}} + \omega\sin\lambda\hat{\mathbf{k}}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = \left(\omega\cos\lambda\hat{\mathbf{j}} + \omega\sin\lambda\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = v_x\omega\cos\lambda\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}} + v_y\omega\cos\lambda\underbrace{\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}}_{=0} + v_x\omega\sin\lambda\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} + v_y\omega\sin\lambda\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = -v_x\omega\cos\lambda\hat{\mathbf{k}} + v_x\omega\sin\lambda\hat{\mathbf{j}} - v_y\omega\sin\lambda\hat{\mathbf{i}}$$

$$\rightarrow \mathbf{F} = 2m\omega\left(v_x\cos\lambda\hat{\mathbf{k}} - v_x\sin\lambda\hat{\mathbf{j}} + v_y\sin\lambda\hat{\mathbf{i}}\right)$$

Componente verticale trascurata ($\leftarrow$ piccola correzione a $\mathbf{g}$)

$$\rightarrow \mathbf{F} \simeq 2m\omega\left(-v_x\sin\lambda\hat{\mathbf{j}} + v_y\sin\lambda\hat{\mathbf{i}}\right)$$

v_x, v_y componenti orizzontali della velocita'

$\rightarrow$ Eq. del moto:

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} \simeq -\dfrac{g}{l}x + 2\omega v_y\sin\lambda = -\dfrac{g}{l}x + 2\omega\dfrac{dy}{dt}\sin\lambda \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \simeq -\dfrac{g}{l}y - 2\omega v_x\sin\lambda = -\dfrac{g}{l}y - 2\omega\dfrac{dx}{dt}\sin\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} \simeq -\dfrac{g}{l}x + 2\omega\dfrac{dy}{dt}\sin\lambda \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \simeq -\dfrac{g}{l}y - 2\omega\dfrac{dx}{dt}\sin\lambda \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda per i e sommando:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} \simeq -\dfrac{g}{l}x + 2\omega\dfrac{dy}{dt}\sin\lambda \\ i\dfrac{d^2y}{dt^2} \simeq -\dfrac{g}{l}iy - 2i\omega\dfrac{dx}{dt}\sin\lambda \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2} \simeq -\frac{g}{l}(x+iy) - 2i\omega\sin\lambda\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)$$

$$z = x + iy$$

$$\rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} \simeq -\frac{g}{l}z - 2i\omega\sin\lambda\frac{dz}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + 2i\omega\sin\lambda\frac{dz}{dt} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{=\omega_0^2}z = 0$$

Soluzione esponenziale:

$$z(t) = Ae^{i\alpha t}$$

$$\rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\omega\sin\lambda - \omega_0^2 = 0$$

$$\rightarrow \alpha = -\omega\sin\lambda \pm \sqrt{\omega^2\sin^2\lambda + \omega_0^2} \approx -\omega\sin\lambda \pm \omega_0$$

(infatti $\omega \ll \omega_0$)

$$\rightarrow z(t) = Ae^{i(-\omega\sin\lambda+\omega_0)t} + Be^{i(-\omega\sin\lambda-\omega_0)t}$$

$$\rightarrow z(t) = e^{-i(\omega\sin\lambda)t}\underbrace{\left[Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}\right]}_{u(t)}$$

Scorporando il moto di Foucault dall'oscillazione:

$$\rightarrow \begin{cases} x_F(t) = \mathrm{Re}\dfrac{z(t)}{u(t)} = \cos(\omega\sin\lambda)t \\ y_F(t) = \mathrm{Im}\dfrac{z(t)}{u(t)} = \sin(\omega\sin\lambda)t \end{cases}$$

$\rightarrow$ Rotazione del piano di oscillazione

Periodo:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega\sin\lambda} = \frac{24}{\sin\lambda} \text{ ore}$$

$$\lambda_{Torino} \cong 45^0 \rightarrow T_{Torino} \cong \frac{24\cdot 2}{\sqrt{2}} \approx 33.9\ h$$