

Costanti del moto, valori iniziali e grandezze conservate

Per un punto materiale, la soluzione del problema del moto matematicamente è riconducibile a quella di un'equazione differenziale del II ordine: si tratta di quello che viene normalmente chiamato un 'problema ai valori iniziali'. In questo caso, la soluzione completa richiede la conoscenza di 6 valori iniziali, visualizzabili per esempio come le componenti di posizione e velocità all'istante $t=0$.

Di queste, in realtà solo 5 sono rilevanti: una delle condizioni iniziali è irrilevante perché legata alla scelta dell'istante iniziale, che è arbitraria. Per un sistema più complicato che ha n gradi di libertà (ossia, che è descritto da n coordinate di qualche tipo), il numero di condizioni iniziali rilevanti è $2n-1$. Questo può essere compreso nel seguente modo:

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale: $n = 1 \rightarrow 2n - 1 = 1$

Cosa significa che una sola condizione iniziale è rilevante?

Sistema conservativo: Supponiamo che l'en. meccanica totale sia E

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \rightarrow \frac{m^2v^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E$$
$$\rightarrow \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E \rightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1$$

Nello spazio rappresentativo a 2 dimensioni (p, x) ,

che si chiama *spazio delle fasi* per il sistema: eq. di un'ellisse

Ogni punto dell'ellisse rappresenta uno stato dinamico dell'oscillatore

→ L'evoluzione nel tempo è rappresentata da un 'punto rappresentativo'

che nel tempo si muove sull'ellisse

I semiassi dell'ellisse dipendono dai parametri del problema k, m e dalla grandezza conservata E , che dipende da una combinazione delle 2 condizioni iniziali

Un'altra combinazione indipendente delle 2 fissa su quale punto dell'ellisse

si trova il punto rappresentativo a $t = 0$, e non ha evidentemente nessuna

rilevanza nel determinare le caratteristiche dell'ellisse (= 'traiettoria' del punto rappresentativo nello spazio delle fasi = evoluzione temporale del sistema),

visto che esse dipendono solo da E

Quindi in questo caso l'unica costante del moto corrispondente

alle condizioni iniziali rilevanti è una grandezza dinamica conservata.

Si potrebbe pensare che le 5 costanti del moto corrispondenti alle condizioni iniziali in 3D ($n=3$) possano essere sempre combinate in altrettante 5 grandezze dinamiche conservate, o piu' in generale che per n qualsiasi ci siano sempre $2n-1$ grandezze conservate. Mentre e' vero che si possono sempre formare $2n-1$ quantita' indipendenti uguali ad altrettante costanti, identificate con le condizioni iniziali, in generale non tutte corrispondono a grandezze dinamiche conservate. Ci sono tuttavia alcuni casi in cui questo e' vero, e per $n = 3 \rightarrow 2n-1 = 5$ il caso della forza gravitazionale $\sim 1/r^2$ e' uno di questi