Oscillatore armonico con gli esponenziali complessi

Modo alternativo di trovare la soluzione dell'eq. differenziale dell'oscillatore armonico

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_0^2 u=0$$

Funzione di prova:

(NB: Se si trova una soluzione generale,quella e' l'unica:

Teorema di esistenza e unicita')

$$u(t)=Ae^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \frac{du}{dt}=A\lambda e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \frac{d^2u}{dt^2}=A\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow A\lambda^2 e^{\lambda t}+\omega_0^2 Ae^{\lambda t}=0$$

$$\rightarrow \lambda^2+\omega_0^2=0 \rightarrow \lambda=\pm i\omega_0$$

$$\rightarrow u_\pm(t)=A_\pm e^{\pm i\omega_0 t}$$

$$\rightarrow u(t)=A_+e^{+i\omega_0 t}+A\_e^{-i\omega_0 t}$$

$$\rightarrow v(t)=\frac{du}{dt}=i\omega_0 A_+e^{+i\omega_0 t}-i\omega_0 A\_e^{-i\omega_0 t}=i\omega_0\left(A_+e^{+i\omega_0 t}-A\_e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$A_\pm$ costanti arbitrarie complesse (= 4 costanti reali)

Restrizione: $u(t), v(t)$ funzioni reali

$$\rightarrow \operatorname{Im} A_+ \sin(\omega_0 t)=-\operatorname{Im} A\_ \sin(\omega_0 t)\rightarrow \operatorname{Im} A_+=-\operatorname{Im} A\_$$

$$\rightarrow \operatorname{Re} A_+ \cos(\omega_0 t)=\operatorname{Re} A\_ \cos(\omega_0 t)\rightarrow \operatorname{Re} A_+=\operatorname{Re} A\_$$

$$\rightarrow A_+=A_-^*=A=C_0e^{i\varphi_0}$$

$$\rightarrow u(t)=Ae^{+i\omega_0 t}+A^*e^{-i\omega_0 t}=C_0\left(e^{i\varphi_0}e^{+i\omega_0 t}+e^{-i\varphi_0}e^{-i\omega_0 t}\right)=2C_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$\rightarrow v(t)=i\omega_0\left(Ae^{+i\omega_0 t}-A^*e^{-i\omega_0 t}\right)=i\omega_0 C_0\left(e^{i\varphi_0}e^{+i\omega_0 t}-e^{-i\varphi_0}e^{-i\omega_0 t}\right)=-2\omega_0 C_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

Cost. arbitrarie in termini delle cond. iniziali:

$$\left.\begin{array}{l} u(0)=a\rightarrow 2C_0\cos(\varphi_0)=a \\ v(0)=b\rightarrow -2\omega_0 C_0\sin(\varphi_0)=b \end{array}\right\}\rightarrow \tan(\varphi_0)=-\frac{b}{a\omega_0}, C_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{\omega_0^2}+a^2}$$