

Cenni al moto generale di rotazione di un corpo rigido

$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, I tensore d'inerzia

Tensore d'inerzia: componenti cartesiane

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}, I_{ij} = I_{ji} \text{ matrice } 3 \times 3$$

I matrice reale simmetrica \rightarrow Teo. spettrale: I diagonalizzabile

1) Ricerca autovalori

$$|I - \lambda I| = 0$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

\rightarrow Eq. cubica per $\lambda \rightarrow 3$ soluzioni reali $\lambda_1 \equiv I_1, \lambda_2 \equiv I_2, \lambda_3 \equiv I_3$

$$I \rightarrow \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

2) Ricerca autovettori

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_{xx} - I_1 & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I_1 & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

+ Simili per I_2, I_3

$\rightarrow 3$ autovettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ che si possono normalizzare

\rightarrow Identificati 3 *assi principali d'inerzia*, esistenti per ogni corpo rigido

Mutuamente ortogonali \rightarrow Definizione di una terna solidale con il c. rigido

Terna solidale con il c. rigido, diretta secondo assi principali: *Body Frame*

Terna fissa nel rif. inerziale: *Space Frame*

Relazione fra derivata di un vettore nel S-frame e nel B-frame:

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_S = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

[Cfr. caso $\mathbf{A} = \mathbf{r}$:

trasformazione velocita' fra s. inerziale e s. in rotazione;

regola indipendente dal fatto che il vettore \mathbf{A} sia il vettore posizione]

Chiarimenti:

$\boldsymbol{\omega}$ e' la vel. angolare del corpo nel sist. di rif. inerziale (s.r.i.)

In questo caso particolare $\boldsymbol{\omega}$ e' costante

$\boldsymbol{\omega}$ puo' essere scomposto rispetto a terne diverse, fisse o mobili

$\boldsymbol{\omega}$ e' costante in S , ma le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ non sono necessariamente costanti in tutte le terne!

Variabili nel tempo se contemporaneamente variano i versori rispetto ai quali sono calcolate

Esempio: \mathbf{r} = pos. di un punto fisso nel sist. di rif. inerziale

Scomposizione di \mathbf{r} rispetto a due terne:

$$\mathbf{r} = \underbrace{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}_S = \underbrace{x^*\hat{\mathbf{x}}^* + y^*\hat{\mathbf{y}}^* + z^*\hat{\mathbf{z}}^*}_B$$

Terna S (Space Frame): Versori di S fissi \rightarrow Componenti costanti

Terna B (Body Frame) : Versori di B mobili \rightarrow Componenti variabili

Derivata del vettore \mathbf{r} :

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}} \quad \text{usando i versori di S} \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 = \underbrace{\frac{dx^*}{dt}\hat{\mathbf{x}}^* + \frac{dy^*}{dt}\hat{\mathbf{y}}^* + \frac{dz^*}{dt}\hat{\mathbf{z}}^*}_{\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}} + \underbrace{x^*\frac{d\hat{\mathbf{x}}^*}{dt} + y^*\frac{d\hat{\mathbf{y}}^*}{dt} + z^*\frac{d\hat{\mathbf{z}}^*}{dt}}_{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad \text{usando i versori di B} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{conformemente all'intuizione}$$

Infatti: Vel. del punto osservata da B = $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \neq 0$

Terna S (Space Frame): versori di B ruotano attorno a \mathbf{r} & versori di S

Terna B (Body Frame) : \mathbf{r} & versori di S ruotano attorno ai versori di B

Vel. angolare: comportamento simile a quello di \mathbf{r}

Scomposizione di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto a due terne:

$$\boldsymbol{\omega} = \underbrace{\omega_x \hat{\mathbf{x}} + \omega_y \hat{\mathbf{y}} + \omega_z \hat{\mathbf{z}}}_S = \underbrace{\omega_x^* \hat{\mathbf{x}}^* + \omega_y^* \hat{\mathbf{y}}^* + \omega_z^* \hat{\mathbf{z}}^*}_B$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt} \hat{\mathbf{x}} + \frac{d\omega_y}{dt} \hat{\mathbf{y}} + \frac{d\omega_z}{dt} \hat{\mathbf{z}} \rightarrow \frac{d\omega_i}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{usando i versori di S} \\ 0 = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \underbrace{\frac{d\omega_x^*}{dt} \hat{\mathbf{x}}^* + \frac{d\omega_y^*}{dt} \hat{\mathbf{y}}^* + \frac{d\omega_z^*}{dt} \hat{\mathbf{z}}^*}_{\frac{d^* \boldsymbol{\omega}}{dt}} + \underbrace{\omega_x^* \frac{d\hat{\mathbf{x}}^*}{dt} + \omega_y^* \frac{d\hat{\mathbf{y}}^*}{dt} + \omega_z^* \frac{d\hat{\mathbf{z}}^*}{dt}}_{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0} \quad \text{usando i versori di B} \end{array} \right.$$

Terna S (Space Frame):

Versori di S fissi \rightarrow Componenti costanti

\rightarrow Versori del B-frame ruotano attorno a $\boldsymbol{\omega}$

Terna B (Body Frame) :

Versori di S mobili \rightarrow Componenti variabili

$\boldsymbol{\omega}$ & versori di S ruotano attorno ai versori del B-frame

Nota: Versori e $\boldsymbol{\omega}$ sono vettori

\rightarrow Si comportano come il vettore posizione rispetto a rotazioni

Ma: $\omega \parallel$ asse di rotazione del corpo

→ Rispetto alla terna B il corpo ruota ad ogni istante attorno ad un asse diverso

→ Asse di rotazione e' mobile

→ Asse di rotazione *ruota* (!) a sua volta

→ Asse *istantaneo* di rotazione

Un paio di domande + risposte:

D: La vel. angolare del corpo non dovrebbe essere nulla nella terna B , solidale al corpo?

R: Indubbiamente, ma ω e' la vel. angolare del corpo *nel* *rif. inerziale*, vettore che si puo' scomporre anche rispetto alla terna B . *Non e'* quella del corpo nel sist. di rif. solidale a B , che ovviamente e' nulla

D: Qual e' l'interesse della terna B ??

R: Nella terna B i mom. d'inerzia sono costanti nel tempo; in generale questo non e' vero in un altro riferimento

Osservazione :

Dinamica del punto: $v = \text{cost} \rightarrow p = \text{cost} \rightarrow F = 0$

Rotazione del corpo rigido: $\omega = \text{cost} \times L = \text{cost}, M = 0$

Perche'?

Moto di un punto con $v = \text{cost}$: Rettilineo uniforme

→ Non accelerato

→ La forza totale agente sul punto e' nulla

Moto di un punto con $\omega = \text{cost}$: Circolare uniforme

→ Accelerato

→ Forza totale agente sul punto non nulla

Moto di un corpo rigido con $\omega = \text{cost}$: Per ogni elemento di massa:

→ Accelerato

→ Forza totale agente sull'elemento non nulla

→ Forza totale = \sum Forze elementari = 0

→ Mom. meccanico totale $\neq 0$

Espressione di mom. angolare ed en. cinetica in assi principali:

$\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ versori assi principali

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = I_1\omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (I_1\omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (\omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3)$$

$$\rightarrow E_k = \frac{1}{2} (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

Se $\boldsymbol{\omega}$ diretta lungo uno degli assi principali $\rightarrow \mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{L} = I_1\omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_S &= \frac{d}{dt} (I_1\omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3) + \\ &+ (\omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \times (I_1\omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \hat{\mathbf{e}}_1 + I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \hat{\mathbf{e}}_2 + I_3 \frac{d\omega_3}{dt} \hat{\mathbf{e}}_3 + \\ &+ \omega_1 \omega_2 I_2 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2}_{\hat{\mathbf{e}}_3} + \omega_1 \omega_3 I_3 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_3}_{-\hat{\mathbf{e}}_2} + \omega_2 \omega_1 I_1 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_1}_{-\hat{\mathbf{e}}_3} + \\ &+ \omega_2 \omega_3 I_3 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3}_{\hat{\mathbf{e}}_1} + \omega_3 \omega_1 I_1 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1}_{\hat{\mathbf{e}}_2} + \omega_3 \omega_2 I_2 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_2}_{-\hat{\mathbf{e}}_1} \end{aligned}$$

→ Eq. di Eulero:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} \Big|_S &= \left[I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) \right] \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &+ \left[I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3) \right] \hat{\mathbf{e}}_2 \\ &+ \left[I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) \right] \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

Il eq. cardinale:

$$\tau_x = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2)$$

$$\tau_y = I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3)$$

$$\tau_z = I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1)$$

Descrive l'evoluzione temporale del vettore $\boldsymbol{\omega}$ nel B-frame

Attenzione - Ricordare che:

$\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\tau}$ sono definiti nel S-frame (inerziale)

Altrimenti le II eq. cardinale non vale

Le loro componenti sono quelle del B-frame (assi principali)

Altrimenti i momenti di inerzia non sono costanti

Esempio 1: Simmetria assiale, rotazione libera

In questo caso: $\boldsymbol{\omega}$ non costante, \mathbf{L} costante, $\tau = 0$ nel S-Frame

$$I_1 = I_2 \equiv I_0 \neq I_3$$

In generale $\boldsymbol{\omega} \neq \text{cost}$ se $\boldsymbol{\omega}$ non \parallel assi principali

$$\rightarrow \begin{cases} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_0) = 0 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - \omega_1 \omega_3 (I_3 - I_0) = 0 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \omega_3 = \text{cost} = A$$

$$\rightarrow \begin{cases} I_0 \frac{d\omega_1}{dt} + A\omega_2 (I_3 - I_0) = 0 \\ I_0 \frac{d\omega_2}{dt} - A\omega_1 (I_3 - I_0) = 0 \end{cases}$$

$$I_0 \frac{d^2\omega_1}{dt^2} + A \frac{d\omega_2}{dt} (I_3 - I_0) = 0$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = A\omega_1 \frac{I_3 - I_0}{I_0}$$

$$\rightarrow \frac{d^2\omega_1}{dt^2} + \underbrace{A^2 \left(\frac{I_3 - I_0}{I_0} \right)^2}_{\equiv k^2} \omega_1 = 0$$

Eq. dei moti armonici; scegliendo opportunamente l'istante iniziale

$$\rightarrow \omega_1(t) = C \cos kt$$

$$\rightarrow \omega_2 = -\frac{I_0}{A(I_3 - I_0)} \frac{d\omega_1}{dt} = C \sin kt \rightarrow \omega_2(t) = C \sin kt$$

\rightarrow Precessione di $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse z

$$\left. \begin{aligned} A &= |\boldsymbol{\omega}| \cos \alpha \\ C &= |\boldsymbol{\omega}| \sin \alpha \end{aligned} \right\} \alpha \text{ angolo (costante) fra } \boldsymbol{\omega} \text{ e asse } z$$

Caso della Terra:

Non esattamente sferica, rigonfiamento equatoriale, simmetria assiale

Ellissoide schiacciato:

$$I_0 = \frac{1}{5}M(r^2 + c^2), I_3 = \frac{2}{5}Mr^2, c \simeq r$$

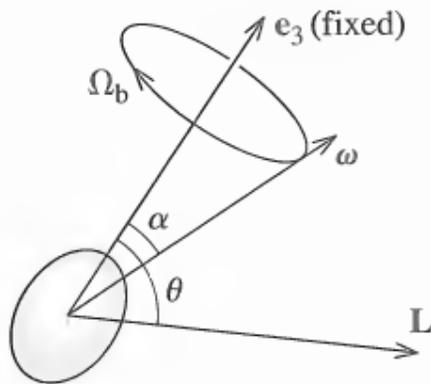
$$\frac{I_3 - I_0}{I_0} = \frac{r^2 - c^2}{r^2 + c^2} = \frac{(r - c)(r + c)}{r^2 + c^2} \simeq \frac{2r(r - c)}{2r^2} = \frac{r - c}{r} = 1 - \frac{c}{r} \simeq 0.0033$$

$$\omega_3 = A = 2\pi \text{ rad / giorno}$$

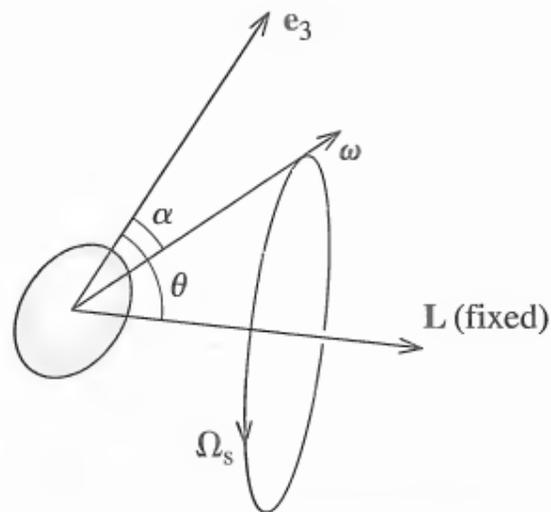
$$\rightarrow k = \frac{I_3 - I_0}{I_0} A \simeq 0.0033 \cdot 2\pi = 0,021 \text{ rad / giorno}$$

$C \sim 0,3''$ sperimentale

Asse z (principale), \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ nei due riferimenti:



(a) Body frame



(b) Space frame

\mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ entrambi mobili attorno a \hat{e}_3

Asse z ($\leftarrow \hat{e}_3$) fisso

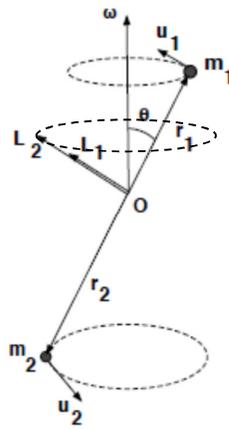
\hat{e}_3 e $\boldsymbol{\omega}$ entrambi mobili attorno a \mathbf{L}

\mathbf{L} fisso

Nel S-frame (inerziale): $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$

\mathbf{L} costante, \hat{e}_3 & $\boldsymbol{\omega}$ in rotazione $\rightarrow \boldsymbol{\tau} = 0$

Esempio 2: manubrio da ginnastica inclinato, ω costante nel S-Frame
 In questo caso: ω costante, L non costante, $\tau \neq 0$ nel S-Frame



uol2,,u

Per questo sistema (sbarra di massa trascurabile + masse puntiformi):

$$m_1 = m_2 = m$$

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega), \quad \mathbf{r}_1 = (x, y, z), \mathbf{r}_2 = (-x, -y, -z)$$

$$\rightarrow \mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 = (-\omega y, \omega x, 0), \mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2 = (\omega y, -\omega x, 0)$$

$$\rightarrow \mathbf{L}_1 = m \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 = m(-\omega xz, -\omega yz, \omega(x^2 + y^2)) = m(-xz, -yz, (x^2 + y^2))\omega$$

$$\rightarrow \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L} = 2\mathbf{L}_1$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_z = I_z \omega \equiv I_{zz} \omega \quad \text{mom. di inerzia rispetto a } z \\ L_x = \underbrace{-2mxz}_{I_{xz}} \omega \quad \text{prodotto di inerzia } x, z \\ L_y = \underbrace{-2myz}_{I_{yz}} \omega \quad \text{prodotto di inerzia } y, z \end{array} \right.$$

Momenti d'inerzia + Prodotti d'inerzia:

In generale, *dipendenti dal tempo*

Manubrio da ginnastica inclinato:

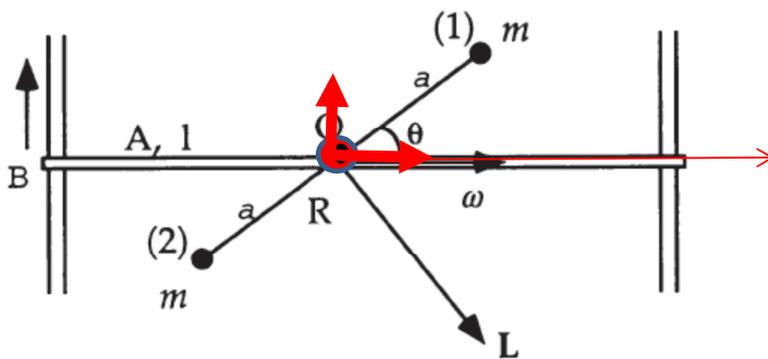
$$(I_{xz}, I_{yz}, I_{zz}) = \sum_{i=1}^2 m (-x_i z_i, -y_i z_i, (x_i^2 + y_i^2))$$

$$\rightarrow (I_{xz}, I_{yz}, I_{zz}) = ml^2 (-\sin 2\theta \cos \omega t, -\sin 2\theta \sin \omega t, 2 \sin^2 \theta)$$

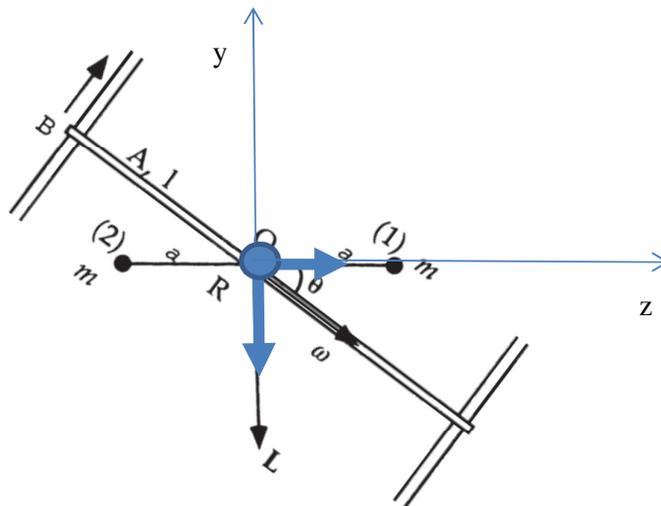
[Talvolta *indipendenti dal tempo*:

Manubrio da ginnastica in rotazione attorno all'asse di simmetria $\rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$(I_{xz}, I_{yz}, I_{zz}) = ml^2 (0, 0, 2)]$$



S: ω fisso, \hat{e}_3 e L mobili



B: \hat{e}_3 fisso, ω e L mobili

ω fissa nel S-Frame

→ Eq. di Eulero danno valore del momento meccanico

$$\tau_1 = \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2)$$

$$\tau_2 = \omega_3 \omega_1 (I_1 - I_3)$$

$$\tau_3 = \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1)$$

Esprimendo i mom. d'inerzia in assi principali:

$$I_1 = 2ma^2$$

$$I_2 = 2ma^2$$

$$I_3 = 0$$

Vel. angolare:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \omega \sin \theta$$

$$\omega_3 = \omega \cos \theta$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tau_1 = \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) = -2ma^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ \tau_2 = \omega_3 \omega_1 (I_1 - I_3) = 0 \\ \tau_3 = \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = 0 \end{cases}$$

Nel S-frame(inerziale): $\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$

ω costante, \mathbf{L} & $\hat{\mathbf{e}}_3$ in rotazione → \mathbf{L} variabile → $\tau \neq 0$

Esempio 3: Trottola simmetrica e forza di gravita'

$$I_1 = I_2 \equiv I_0 \neq I_3$$

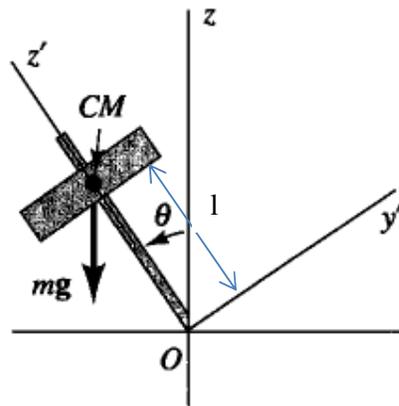
$$\mathbf{L} = I_1\omega_1\hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\omega_2\hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\omega_3\hat{\mathbf{e}}_3 = I_0(\omega_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2\hat{\mathbf{e}}_2) + I_3\omega_3\hat{\mathbf{e}}_3 = I_0\boldsymbol{\omega} + (I_3 - I_0)\omega_3\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\Omega \equiv \frac{I_3 - I_0}{I_0}\omega_3$$

$$\rightarrow \mathbf{L} = I_0(\boldsymbol{\omega} + \Omega\hat{\mathbf{e}}_3)$$

Scegliendo come polo O (anche per i mom. d'inerzia!):

$$\boldsymbol{\tau} = Mgl\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_3$$



$$\tau_3 = \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = 0 \rightarrow \frac{d\omega_3}{dt} = 0 \rightarrow \omega_3 = \text{cost} \rightarrow \Omega = \text{cost}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{L}}{I_0} \times \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = Mgl\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 \times \frac{d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{I_0} \times (\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{e}}_3) = \frac{\mathbf{L} - (\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3)\hat{\mathbf{e}}_3}{I_0} = \frac{\mathbf{L} - I_3\omega_3\hat{\mathbf{e}}_3}{I_0}$$

$$\rightarrow \mathbf{L} = I_0\hat{\mathbf{e}}_3 \times \frac{d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt} + I_3\omega_3\hat{\mathbf{e}}_3$$

Eq. del moto per il versore $\hat{\mathbf{e}}_3$ (asse di simmetria della trottola):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_0\hat{\mathbf{e}}_3 \times \frac{d^2\hat{\mathbf{e}}_3}{dt^2} + I_3\omega_3 \frac{d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt} = Mgl\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_3$$

Scomposizione di \hat{e}_3 nel S-frame:

θ, φ angoli polare e azimutale = direzione di \hat{e}_3 nel S-frame

$$\hat{e}_3 = \sin \theta (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) + \cos \theta \hat{k},$$

→ Eq. per \hat{e}_3 proiettata su $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

3 eq. differenziali accoppiate → Algebra estrema...

→ Coppia di equazioni per θ, φ :

$$I_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \left(Mgl + I_0 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cos \theta - I_3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cos \theta - I_3 \omega_3 \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin \theta$$

$$I_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin \theta = \frac{d\theta}{dt} (I_3 \omega_3 - 2I_0 \cos \theta)$$

Caso generale complicato, meglio trattato con metodi piu' avanzati

Caso particolare: piu' semplice

$$\theta = \text{cost}$$

$$\rightarrow I_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin \theta = 0 \rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \text{cost} \equiv \Omega$$

$$\rightarrow Mgl + (I_0 - I_3) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cos \theta - I_3 \omega_3 \frac{d\varphi}{dt} = 0 \rightarrow Mgl + (I_0 - I_3) \Omega^2 \cos \theta - I_3 \omega_3 \Omega = 0$$

$$\rightarrow (I_0 - I_3) \cos \theta \Omega^2 - I_3 \omega_3 \Omega + Mgl = 0$$

$$\rightarrow \Omega = \frac{I_3 \omega_3 \pm \sqrt{(I_3 \omega_3)^2 - 4(I_0 - I_3) \cos \theta Mgl}}{2(I_0 - I_3) \cos \theta}$$

$$\rightarrow \Omega = \frac{I_3 \omega_3}{2(I_0 - I_3) \cos \theta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(I_0 - I_3) \cos \theta Mgl}{(I_3 \omega_3)^2}} \right)$$

Freq. di precessione regolare:

L'asse di simmetria della trottola ($\parallel \hat{e}_3$) ruota attorno all'asse z (fisso)

con vel. angolare Ω

→ Precessione forzata (forza di gravita')

Esistenza di soluzioni reali:

$$\frac{4(I_0 - I_3)\cos\theta Mgl}{(I_3\omega_3)^2} < 1 \rightarrow \omega_3 > \sqrt{\frac{4(I_0 - I_3)\cos\theta Mgl}{I_3^2}} \equiv \omega_0$$

Se $\omega_3 \gg \omega_0$:

$$\Omega_{fast} \approx \frac{I_3\omega_3}{(I_0 - I_3)\cos\theta}$$

$$\Omega_{slow} \approx \frac{I_3\omega_3}{2(I_0 - I_3)\cos\theta} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{4(I_0 - I_3)\cos\theta Mgl}{(I_3\omega_3)^2} \right)$$

$$\rightarrow \Omega_{slow} \approx \frac{1}{(I_0 - I_3)} \frac{(I_0 - I_3)Mgl}{I_3\omega_3} = \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$$

Nel S -frame(inerziale):

$\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{L} & $\hat{\mathbf{e}}_3$ in rotazione