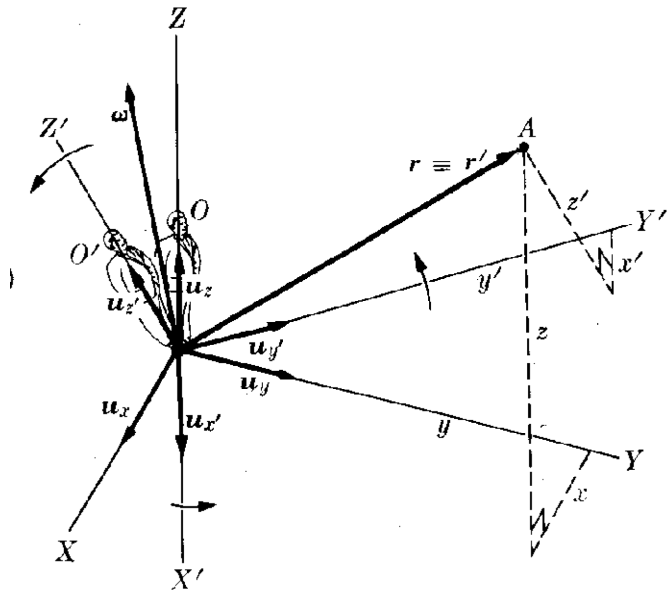
Nota aggiuntiva sulla trasformazione di velocita' e accelerazione fra un SRI e uno in rotazione uniforme



Osservando la figura, si ha per la posizione di A:

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}} = x'\hat{\boldsymbol{i}}' + y'\hat{\boldsymbol{j}}' + z'\hat{\boldsymbol{k}}'$$

Ossia: stesso vettore, diverse componenti cartesiane a seconda di quale terna si sceglie

Consideriamo ora la velocita' di A: conformemente all'intuizione, essa risultera' diversa per le due terne, in considerazione della velocita' relativa fra di esse

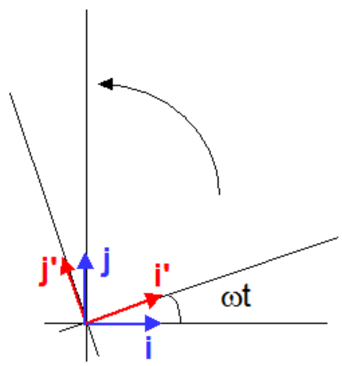
$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{V} = \left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_O = \dfrac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{i}} + \dfrac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{j}} + \dfrac{dz}{dt}\hat{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{V}' = \left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{O'} = \dfrac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}' + \dfrac{dy'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}' + \dfrac{dz'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}' \end{cases}$$

In O si puo' tuttavia anche scomporre il vettore ***r*** utilizzando i versori di O', che in O risultano evidentemente mobili: questa scomposizione risulta utile per mettere il relazione le due velocita' ***V*** e ***V'***. Simmetricamente, in O' si potrebbe scomporre ***r*** lungo i versori di O.

$$\rightarrow \boldsymbol{V} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}'}_{=\boldsymbol{V}'} + x'\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} + z'\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + x'\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} + z'\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt}$$

Si pone quindi il problema di calcolare le derivate prime dei versori mobili: siccome essi hanno modulo fisso e unitario, la cosa e' relativamente facile:



Prendendo $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{k}}$, si ha nel piano xy:

$$\hat{\boldsymbol{i}}' = (\cos\omega t)\hat{\boldsymbol{i}} + (\sin\omega t)\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\hat{\boldsymbol{j}}' = -(\sin\omega t)\hat{\boldsymbol{i}} + (\cos\omega t)\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat{\boldsymbol{i}}'\cdot\boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{i} + \frac{d}{dt}\left(\hat{\boldsymbol{i}}'\cdot\boldsymbol{j}\right)\hat{\boldsymbol{j}}' + \frac{d}{dt}\left(\hat{\boldsymbol{i}}'\cdot\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{k}$$

$$\rightarrow \frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\omega t)\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{d}{dt}(\sin\omega t)\hat{\boldsymbol{j}} = -\omega\left(\sin\omega t\hat{\boldsymbol{i}} - \cos\omega t\hat{\boldsymbol{j}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} = \omega\hat{\boldsymbol{j}}'$$

$$\hat{\boldsymbol{j}}' = \hat{\boldsymbol{k}}'\times\hat{\boldsymbol{i}}' \rightarrow \frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} = \omega\left(\hat{\boldsymbol{k}}'\times\hat{\boldsymbol{i}}'\right) = \omega\left(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{i}}'\right) = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{i}}', \quad \hat{\boldsymbol{k}}' \equiv \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\rightarrow \frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{j}}'$$

$$\rightarrow \frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt} = 0 = \underbrace{\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{k}}'}_{\boldsymbol{\omega}\parallel\hat{\boldsymbol{k}}'}, \quad \hat{\boldsymbol{k}}' \text{ costante in questo caso}$$

Il risultato si generalizza a quasiasi direzione di $\boldsymbol{\omega}$.

$$\rightarrow x'\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt}+y'\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt}+z'\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt}=x'\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{i}}'+y'\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{j}}'+z'\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{k}}'$$

$$\rightarrow x'\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt}+y'\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt}+z'\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\left(x'\hat{\boldsymbol{i}}'+y'\hat{\boldsymbol{j}}'+z'\hat{\boldsymbol{k}}'\right)=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

Ripetendo le stesse considerazioni, questa volta per le derivate di ***V*** e ***V'***:
In O si puo' tuttavia anche scomporre il vettore ***V*** utilizzando i versori di O', che in O risultano evidentemente mobili: questa scomposizione risulta utile per mettere il relazione le due velocita' ***a*** e ***a***'. Simmetricamente, in O' si potrebbe scomporre ***V'*** lungo i versori di O

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}=\frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}+\frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}+\frac{dz}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}=v_x\hat{\boldsymbol{i}}+v_y\hat{\boldsymbol{j}}+v_z\hat{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{V}'=\frac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}'+\frac{dy'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}'+\frac{dz'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}'=v_x'\hat{\boldsymbol{i}}'+v_y'\hat{\boldsymbol{j}}'+v_z'\hat{\boldsymbol{k}}'\end{cases}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{a}=\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)_O=\frac{dv_x}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}+\frac{dv_y}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}+\frac{dv_z}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{a}'=\left(\frac{d\boldsymbol{V}'}{dt}\right)_{O'}=\frac{dv_x'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}'+\frac{dv_y'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}'+\frac{dv_z'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}'\end{cases}$$

$$\rightarrow\boldsymbol{a}=\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)_O=\frac{d\left(\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)}{dt}$$

$$\rightarrow\boldsymbol{a}=\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)_O=\left(\frac{d\boldsymbol{V}'}{dt}\right)_O+\boldsymbol{\omega}\times\underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}_{\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}\quad,\quad \boldsymbol{\omega}\text{ costante}$$

$$\rightarrow\boldsymbol{a}=\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)_O=\left(\frac{d\boldsymbol{V}'}{dt}\right)_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{V}'}{dt}\right)_O=\underbrace{\frac{dv_x'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}'+\frac{dv_y'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}'+\frac{dv_z'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}'}_{\boldsymbol{a}'}+\underbrace{v_x'\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt}+v_y'\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt}+v_z'\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt}}_{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}'}$$

$$\rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)$$

Differenza importante circa il calcolo di ***a*** rispetto al precedente calcolo di ***V***: la scomposizione lungo i versori di O' riguarda la velocita' del punto in O', che e' *diversa* dalla velocita' del punto in O; nel calcolo di ***V*** la scomposizione lungo i versori di O' riguarda la posizione del punto, che e' *identica* in O e in O' . Tuttavia, O puo' evidentemente osservare ***V'***, la velocita' del punto in O' , scomporla lungo i versori di O' - che per lui sono mobili, e farne la derivata rispetto al tempo: questo e' il significato del termine $\left(\frac{dV'}{dt}\right)_O$, altrimenti un po' misterioso.