Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2013/14

Meccanica

Prova scritta – 1/09/2014

Problema 1

Un punto materiale si muove nel piano lungo una curva descritta dall'equazione:

$$y = A\sin kx$$

La componente x della velocita' e' costante:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0$$

1. Determinare il modulo della velocita'
2. Determinare modulo e direzione dell'accelerazione

1)

$$y = A\sin kx$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = Ak\cos kx\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = Ak\cos kxv_0$$

$$\rightarrow |\mathbf{v}|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2\left(1 + A^2k^2\cos^2 kx\right)$$

$$\rightarrow |\mathbf{v}| = v_0\sqrt{1 + A^2k^2\cos^2 kx}$$

2)

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = Akv_0\cos kx \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -Ak^2v_0^2\sin kx \equiv |\mathbf{a}|$$

a diretta lungo y

Problema 2

Un punto materiale si muove, in presenza di attrito dinamico descritto dal coefficiente μ, su una guida circolare di raggio R in assenza di gravita'

1. Trovare la relazione fra l'accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ e la velocita' angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
2. Determinare l'andamento nel tempo della velocita' angolare se $\omega(0)=\omega_0$ e disegnarne il grafico

1)

$$F_c = m\omega^2 R$$

$$F_a = -\mu m\omega^2 R$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_N = \omega^2 R \\ a_T = -\mu\omega^2 R = \alpha R \end{cases}$$

$$\rightarrow \alpha = -\mu\omega^2$$

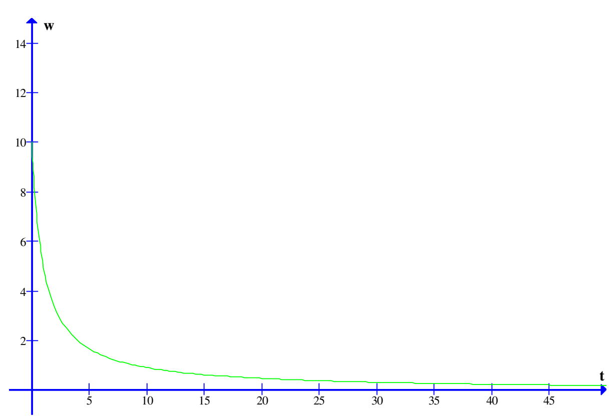
2)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\mu\omega^2 \rightarrow \frac{d\omega}{\omega^2} = -\mu dt$$

$$\rightarrow -\frac{1}{\omega}\bigg|_{\omega_0}^{\omega} = -\mu t \rightarrow \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega} = -\mu t$$

$$\rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_0} + \mu t = \frac{1+\omega_0\mu t}{\omega_0}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{1+\omega_0\mu t}$$



Problema 3

Una corda inestensibile e di massa trascurabile è avvolta su di un cilindro omogeneo pieno di raggio *R* e massa *M*; ad un suo estremo è appesa una massa *m*. Ad un certo istante il cilindro viene messo in rotazione attorno al suo asse da un motore; quando ha raggiunto la velocità angolare ω, la massa *m* si è sollevata di un tratto *d*.

1. Trascurando tutti gli attriti, calcolare il lavoro compiuto dal motore

Quando ha raggiunto la condizione descritta sopra, il sistema viene fermato e il motore viene sconnesso; successivamente il sistema viene rilasciato, lasciando liberi cilindro e massa *m*.

2. Calcolare il tempo necessario a *m* per ricadere nella posizione di partenza

1) Lavoro compiuto dal motore :

$$W = E_k(cil) + E_k(m) + \Delta U$$

$$E_k(cil) = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{4} MR^2\omega^2$$

$$E_k(m) = \frac{1}{2} mv^2$$

$$\Delta U = mgd$$

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \text{rotolamento}$$

$$\rightarrow E_k(cil) = \frac{1}{4} MR^2\omega^2 = \frac{1}{4} Mv^2$$

$$\rightarrow W = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)v^2 + mgd$$

2) Conservazione energia:

$$\Delta U = E_k\left(cil\right) + E_k\left(m\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)v^2 = mg\left(d - y\right)$$

$$\rightarrow v = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2mg\left(d-y\right)}{m + \frac{M}{2}}}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2mg\left(d-y\right)}} = \frac{dt}{\sqrt{m + \frac{M}{2}}}$$

$$\rightarrow 2\sqrt{\frac{d-y}{2mg}} = \frac{t}{\sqrt{m + \frac{M}{2}}} \rightarrow d - y = \frac{2mgt^2}{4\left(m + \frac{M}{2}\right)}$$

$$\rightarrow y = d - \frac{m}{2\left(m + \frac{M}{2}\right)}gt^2$$

$$\rightarrow t_{arr} = \sqrt{\frac{2\left(m + \frac{M}{2}\right)d}{mg}}$$