Corso di Laurea in Fisica

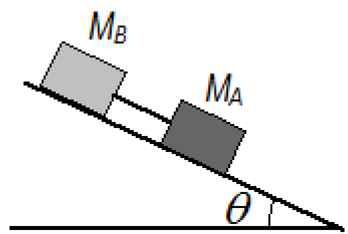
A.A. 2012/13

Meccanica

Prova scritta – 02/07/2013

Problema 1

Due masse $M_A = 1.2\ kg$ e $M_B = 0.6\ kg$, unite da una fune inestensibile e priva di massa, si trovano su un piano inclinato scabro, con *A* piu' in basso di *B*. I coefficienti di attrito dinamico fra blocchi e piano sono, rispettivamente, $\mu_A=0.433$ e $\mu_B=0.866$.



a) Se i due blocchi stanno scendendo lungo il piano con velocita' costante, calcolare θ e tensione della fune
b) All'istante $t=0$, quando la velocita' (costante fino a quel momento) vale $v_0=5\ ms^{-1}$, la fune si rompe: calcolare la velocita' relativa fra *A* e *B* in funzione di *t* e disegnarne il grafico

$$v = \text{cost} \rightarrow F_{tot} = 0$$
$$A: F_{tot} = m_A g \sin\theta - \mu_A m_A g \cos\theta - T = 0$$
$$B: F_{tot} = m_B g \sin\theta - \mu_B m_B g \cos\theta + T = 0$$
$$\rightarrow (m_A + m_B) g \sin\theta - (\mu_A m_A + \mu_B m_B) g \cos\theta = 0$$
$$\rightarrow \tan\theta = \frac{\mu_A m_A + \mu_B m_B}{m_A + m_B} = \frac{0.433\cdot 1.2 + 0.866\cdot 0.6}{1.8} = 0.577$$
$$\rightarrow \theta = 30^0$$
$$\rightarrow (m_A - m_B) g \sin\theta - (\mu_A m_A - \mu_B m_B) g \cos\theta = 2T$$
$$\rightarrow T = \frac{(m_A - m_B) g \sin\theta - (\mu_A m_A - \mu_B m_B) g \cos\theta}{2}$$
$$\rightarrow T = \frac{0.6\cdot 9.81\cdot 0.5 - (0.433\cdot 1.2 - 0.866\cdot 0.6)\cdot 9.81\cdot 0.866}{2} = \frac{2.943 - 0}{2} = 1.47N$$

$$A: F_A = m_A g \sin\theta - \mu_A m_A g \cos\theta \rightarrow a_A = g\left(\sin\theta - \mu_A \cos\theta\right)$$

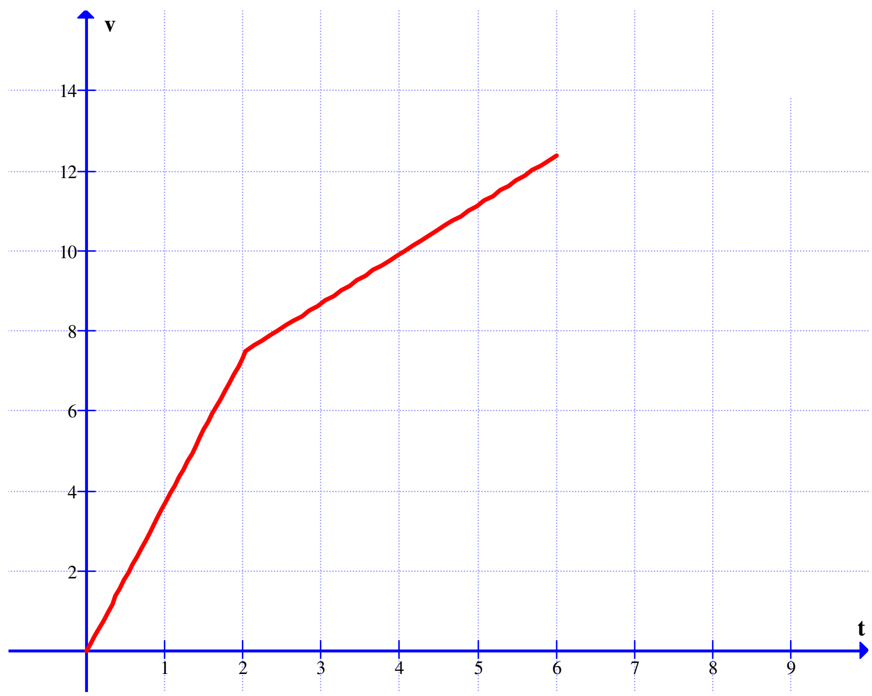
$$B: F_B = m_B g \sin\theta - \mu_B m_B g \cos\theta \rightarrow a_B = g\left(\sin\theta - \mu_B \cos\theta\right)$$

$$\rightarrow v_A = v_0 + g\left(\sin\theta - \mu_A \cos\theta\right)t = 5 + 9.81(0.5 - 0.433 \cdot 0.866)t$$

$$\rightarrow v_B = v_0 + g\left(\sin\theta - \mu_B \cos\theta\right)t = 5 + 9.81(0.5 - 0.866 \cdot 0.866)t = 5 - 9.81 \cdot 0.25 \cdot t$$

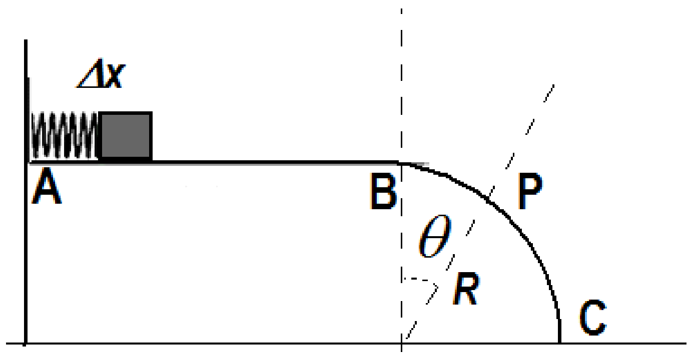
$$\rightarrow v_B = 0 \ \text{ per } t \ = \ 2.04 \ s$$

$$\rightarrow v_A - v_B = \begin{array}{ll} g\left(\mu_B - \mu_A\right)\cos\theta \ t = 9.81 \cdot 0.433 \cdot 0.866 \cdot t = 3.68 \cdot t & 0 < t < 2.04 \\ v_A = 5 + 1.23 \cdot t & 2.04 < t \end{array}$$



Problema 2

La guida liscia *ABC* e' formata da un tratto orizzontale *AB* e da un arco di circonferenza *BC* di raggio $R = 20\ cm$. In *A* si trova una molla con costante elastica $k = 20\ Nm^{-1}$, tenuta compressa di un tratto Δx tramite un fermo; posizionato all'estremo libero della molla c'e' un blocchetto di massa $m = 100\ g$. Il fermo viene rimosso e il blocchetto schizza via lungo la guida, staccandosene nel punto *P* individuato, lungo l'arco *BC*, dall'angolo $\theta = 30^0$ rispetto alla verticale.



Calcolare:

a) La velocita' del blocco nel punto *P* in cui si stacca dalla guida
b) Il valore di Δx
c) La reazione vincolare esercitata dalla guida in funzione della posizione angolare θ del blocco nel tratto *BP*

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

$$\text{Distacco} \rightarrow N = 0 \rightarrow m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta$$

$$\rightarrow v = \sqrt{gR\cos\theta} = \sqrt{9.81 \cdot 0.2 \cdot 0.866} \approx 1.3\ ms^{-1}$$

$$\rightarrow \Delta h = R(1-\cos\theta)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mgR\cos\theta$$

$$\rightarrow (\Delta x)^2 = \frac{mgR}{k}(\cos\theta - 2 + 2\cos\theta) = \frac{mgR}{k}(3\cos\theta - 2)$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{mgR}{k}(3\cos\theta - 2)} = \sqrt{\frac{0.1 \cdot 9.81 \cdot 0.2}{20}0.598} \approx 0.077\ m$$

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

$$\rightarrow N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

$$mgR + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mrR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow mv^2 = k(\Delta x)^2 + 2mgR(1-\cos\theta)$$

$$\rightarrow N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) - \frac{k(\Delta x)^2}{R} = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{k(\Delta x)^2}{R}$$

$$\frac{k(\Delta x)^2}{R} = mg(3\cos\theta_{dist} - 2) = mg\left(3\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)$$

$$\rightarrow N = mg(3\cos\theta - 2) - mg\left(3\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right) = 3mg\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Problema 3

Una sfera piena rotola senza strisciare su per un piano inclinato di $\theta = 30^0$ rispetto al piano orizzontale. All'inizio della salita il c.m. della sfera aveva una velocità lineare $v_0 = 5.18\ ms^{-1}$.
Calcolare:

a) L'incremento di altezza massimo raggiunto dalla sfera sul piano inclinato
b) Il tempo che impiega a ritornare in fondo

$$v = \omega R$$

$$\rightarrow E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m\omega^2R^2 = \frac{7}{10}m\omega^2R^2$$

$$\rightarrow mgh = \frac{7}{10}m\omega_0^2R^2 \rightarrow h = \frac{7\omega_0^2R^2}{10g} = \frac{7v_0^2}{10g} \approx 1.91\ m$$

Per un istante qualsiasi durante la discesa, in cui il CM e' alla quota y con vel. v:

$$h - y = \frac{7v^2}{10g} = s\sin\theta$$

$$\rightarrow ds = -\frac{dy}{\sin\theta} = \frac{7d\left(v^2\right)}{10g\sin\theta} = \frac{7\cdot 2vdv}{10g\sin\theta} = \frac{7vdv}{5g\sin\theta}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{dt} = v = \frac{7v}{5g\sin\theta}\frac{dv}{dt} \rightarrow a = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

$$\rightarrow l = \frac{1}{2}a\overline{t}^2 \rightarrow \overline{t} = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{\sin\theta\frac{5}{7}g\sin\theta}} = \sqrt{\frac{14h}{5g\sin^2\theta}}$$

$$\rightarrow \overline{t} = \sqrt{\frac{14\cdot 7v_0^2}{50g^2\sin^2\theta}} = \frac{7}{5}\frac{v_0}{g\sin\theta} \approx 1.48\ s$$