Corso di Laurea in Fisica

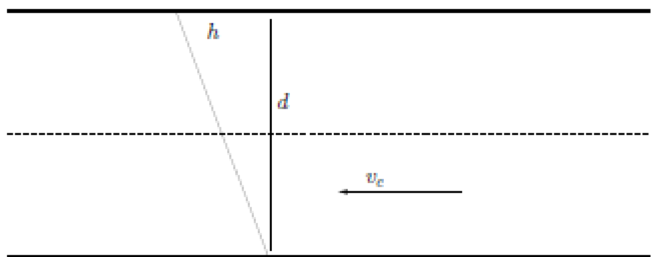
A.A. 2011/12

Meccanica

Prova scritta – 3/9/2012

Problema 1

Un nuotatore è capace di nuotare ad una velocità massima v_n nell'acqua immobile. Vuole attraversare un fiume di larghezza d, nel quale l'acqua scorre ad una velocità v_c che si suppone indipendente dalla distanza dalla riva.



Decide di nuotare in linea retta, in modo che la propria velocità relativa all'acqua formi un angolo θ con l'asse del fiume.

1. Quanto vale, in funzione di θ, l'angolo α tra la velocità del nuotatore relativa al riferimento della riva e l'asse del fiume?
2. Per quale valore di θ il fiume viene attraversato nel minor tempo possibile?
3. Per quale valore di θ dopo la traversata è minimo lo spostamento trasversale h causato dalla corrente?

Vel. nuotatore relativa all'acqua:

$$\boldsymbol{v}_{rel} = v_n \cos\theta \hat{\boldsymbol{i}} + v_n \sin\theta \hat{\boldsymbol{j}}$$

Vel. acqua relativa alle sponde:

$$\boldsymbol{v}_{acqua} = -v_c \hat{\boldsymbol{i}}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{v}_{acqua} = \left(v_n \cos\theta - v_c\right)\hat{\boldsymbol{i}} + v_n \sin\theta \hat{\boldsymbol{j}}$$

$\rightarrow$ Angolo α fra vel. nuotatore e asse x :

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_n \sin\theta}{v_n \cos\theta - v_c}$$

Tempo attraversamento:

$$T = \frac{d}{v_y} = \frac{d}{v_n \sin\theta} \rightarrow T = T_{\min} \leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Spostamento laterale h:

$$\begin{cases} x = \left(v_n \cos\theta - v_c\right)t \\ y = \left(v_n \sin\theta\right)t \end{cases} \rightarrow h = d\,\frac{v_n \cos\theta - v_c}{v_n \sin\theta}$$

$$h = \min \leftrightarrow \frac{dh}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{d}{v_n}\frac{-v_n \sin^2\theta - \left(v_n \cos\theta - v_c\right)\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{d}{v_n}\frac{-v_n \sin^2\theta - v_n \cos^2\theta + v_c \cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\rightarrow -\frac{d}{v_n}\frac{v_n - v_c \cos\theta}{\sin^2\theta} = 0 \rightarrow \cos\theta = \frac{v_n}{v_c}$$

Problema 2

Un sasso viene lanciato dal suolo verticalmente verso l'alto con velocita' iniziale v_0. Supponendo che il sasso sia sottoposto all'effetto di una forza di attrito viscoso del tipo $\boldsymbol{F}_a = -b\boldsymbol{v}$, calcolare:

1. Il tempo impiegato dal sasso a raggiungere l'altezza massima
2. Il valore limite del tempo calcolato in 1. per *b-> 0*, e confrontarlo con il tempo impiegato nel caso di moto in assenza di attriti

$$ma = -mg - bv \rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \underbrace{\frac{b}{m}}_{=k} v$$

$$\frac{dv}{dt} = -(g + kv) \rightarrow \frac{dv}{g + kv} = -dt$$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g + kv} = -t \rightarrow \frac{1}{k} \ln(g + kv)\Big|_{v_0}^{v} = -t$$

$$\rightarrow \ln(g + kv) - \ln(g + kv_0) = -kt$$

$$\rightarrow \ln \frac{g + kv}{g + kv_0} = -kt \rightarrow \frac{g + kv}{g + kv_0} = e^{-kt}$$

$$\rightarrow g + kv = (g + kv_0)e^{-kt} \rightarrow v = \left(\frac{g}{k} + v_0\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

$$v = 0 \rightarrow \left(\frac{g}{k} + v_0\right)e^{-kt} - \frac{g}{k} = 0 \rightarrow e^{-kt} = \frac{\frac{g}{k}}{\frac{g}{k} + v_0}$$

$$\rightarrow e^{kt} = \frac{\frac{g}{k} + v_0}{\frac{g}{k}} = \frac{g + v_0 k}{g} \rightarrow t = \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{v_0 k}{g}\right)$$

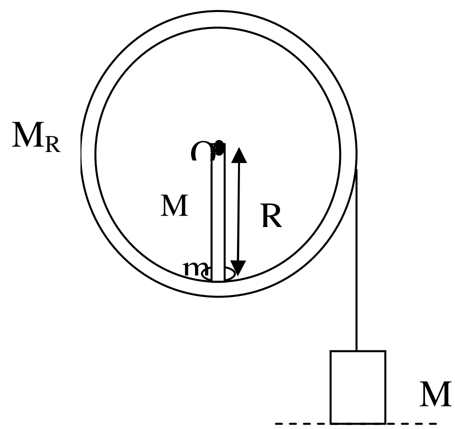
$$b \sim 0 \rightarrow k \sim 0 \rightarrow t = \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{v_0 k}{g}\right) \sim \frac{1}{k} \frac{v_0 k}{g} = \frac{v_0}{g}$$

Moto senza attrito:

$$v = v_0 - gt: \ v = 0 \rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

Problema 3

Una ruota formata da un cerchione omogeneo di massa $M_R = 8\ kg$ e raggio $R = 1\ m$ e' posta in un piano verticale, vincolata senza attrito nel suo centro O per mezzo di un solo raggio omogeneo di massa $M_S = 2\ kg$. Un anellino di massa $m = 1\ g$ e' libero di scorrere senza attrito lungo il raggio. Il sistema e' inizialmente in quiete con il raggio in posizione verticale.



All'istante $t = 0$ il sistema viene messo in rotazione lasciando andare una massa M sospesa ad un filo arrotolato attorno alla ruota.

1. Determinare il momento di inerzia del sistema rotante rispetto all'asse di rotazione, e la posizione del centro di massa (si trascuri il contributo dell'anellino)
2. All'istante $t = 0$ il sistema viene messo in rotazione lasciando andare una massa M sospesa ad un filo arrotolato attorno alla ruota. Determinare il minimo valore di M che garantisce che dopo mezzo giro l'anellino resti attaccato al cerchione

$$\left.\begin{aligned} I_R &= M_R R^2 \\ I_S &= \frac{1}{3} M_S R^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow I = I_R + I_S \simeq 8.6\ kg\ \ m^2$$

Riferimento: origine nel punto piu' basso della ruota

$$x_{CM} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{M_R R + M_S \frac{R}{2}}{M_R R + M_S \frac{R}{2}} \simeq 0.9\ m$$

Dopo mezzo giro:

$$F_g = F_c$$

$$mg = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v^2 = gR$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Conservazione energia meccanica:

$$Mg\pi R = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mg2R + \frac{1}{2}I_R\omega^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2 + M_S gR$$

$$\rightarrow Mg\pi R = \frac{1}{2}MgR + \frac{1}{2}mgR + mg2R + \frac{1}{2}M_R R^2\frac{gR}{R^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}M_S R^2\frac{gR}{R^2} + M_S gR$$

$$\rightarrow M\left(\pi - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}m + 2m + \frac{1}{2}M_R + \frac{1}{6}M_S + M_S$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}M\left(2\pi - 1\right) = \frac{5}{2}m + \frac{1}{2}M_R + \frac{7}{6}M_S$$

$$\rightarrow M = \frac{5m + M_R + \frac{7}{3}M_S}{2\pi - 1} \simeq 2.4\ kg$$