Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2011/12

# Meccanica

Prova scritta – 4/4/2012

Problema 1

La velocita' di un atleta in una gara di corsa puo' essere in certi casi rappresentata dalla funzione

$$v(t) = v_R\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

in cui $v_R$, velocita' di regime = *11 m s*$^{-1}$, e $\tau$, costante di tempo = *1.5 s* , sono costanti caratteristiche dell' atleta.

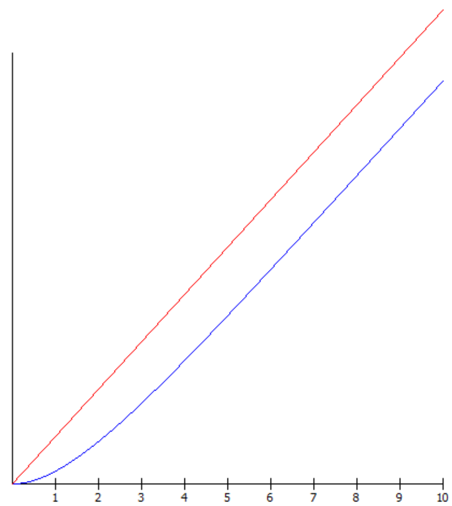
a) Calcolare lo spazio percorso dall'atleta in un tempo *T=10 s*
b) Rappresentare graficamente la legge oraria dell'atleta (spazio in funzione del tempo) e quella di un ipotetico atleta in moto rettilineo uniforme con velocita' $v_R$

$$x(t) = \int_0^t v_R\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt = v_R\left[\int_0^t v_R dt - \int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}}dt\right]$$

$$\rightarrow x(t) = v_R\left[t - (-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^t = v_R\left[t + \tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)\right]$$

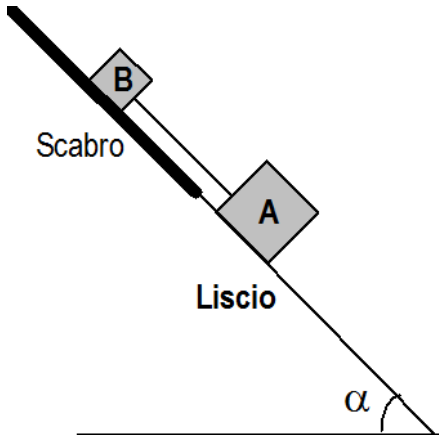
$$\rightarrow x(T) = v_R\left[T + \tau\left(e^{-\frac{T}{\tau}} - 1\right)\right] = 11\cdot\left[10 + 1.5\left(e^{-\frac{10}{1.5}} - 1\right)\right] \quad m$$

$$\rightarrow x(T) \approx 11\cdot[10 - 1.5] = 93.5 \quad m$$


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Problema 2

Due blocchi di massa $m_A$=0.6 kg e $m_B=m_A/2$ scivolano lungo un piano inclinato scabro ($\alpha$= $45^0$, $\mu_D$=0.3), uniti da un filo inestensibile e privo di massa di lunghezza $l$ = 0.5 m. All'istante $t$ = 0, con il filo in tensione e i due blocchi in movimento con velocita' $v_0$=4 $ms^{-1}$, il blocco $A$ entra in un tratto privo di attrito




a) Calcolare la tensione nel filo durante l'intervallo di tempo in cui solo $A$ scivola nel tratto senza attrito
b) Calcolare con quale velocita' $B$ entra a sua volta nel tratto senza attrito

$$m_A a = m_A g \sin\alpha - T$$
$$m_B a = m_B g \sin\alpha + T - \mu_D N_B$$
$$N_B = m_B g \cos\alpha$$
$$\rightarrow (m_A + m_B) a = (m_A + m_B) g \sin\alpha - \mu_D m_B g \cos\alpha$$
$$\rightarrow a = g\left(\sin\alpha - \mu_D \frac{m_B}{m_A + m_B}\cos\alpha\right)$$
$$\rightarrow a = 9.81\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0.3\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 9.81\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-0.1) \approx 6.22\ ms^{-2}$$
$$\rightarrow T = m_A(g\sin\alpha - a) \approx 0.6\left(9.81\frac{\sqrt{2}}{2} - 6.22\right)N \approx 0.42\ N$$

$$x_A(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Istante in cui $B$ entra nel tratto liscio:

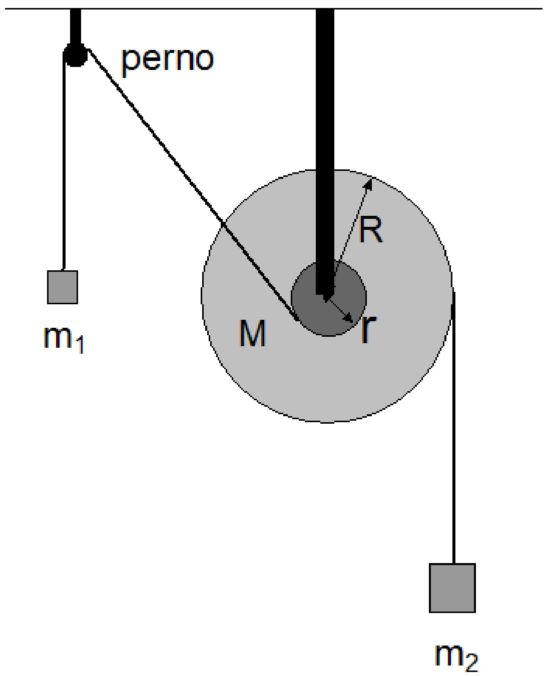
$$\rightarrow v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = l \rightarrow t = \bar{t} = \frac{1}{a}\left(-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al}\right)$$

$$\rightarrow v(\bar{t}) = v_0 + a\bar{t} = v_0 - v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al} = \sqrt{v_0^2 + 2al}$$

$$\rightarrow v(\bar{t}) \approx \sqrt{16 + 2 \cdot 6.22 \cdot 0.5} \approx 4.71\ ms^{-1}$$

Problema 3

Su un cilindro omogeneo di massa $M$ e raggio $R$ , che puo' ruotare senza attrito attorno a un asse orizzontale, e' avvolta una fune inestensibile e priva di massa, al cui estremo e' attaccata una massa $m_2$; sull'asse del cilndro e' fissato un secondo cilindro, di massa trascurabile e raggio $r$, solidale con il primo, sul quale e' avvolta una fune inestensibile e priva di massa, che passa al di sopra di un perno liscio e al cui estremo e' appesa la massa $m_1$. Il sistema viene lasciato libero all'istante iniziale in cui e' fermo.




a) Calcolare le accelerazioni delle due masse $m_1$ $m_2$
b) Calcolare l'accelerazione di $m_1$ dopo che $m_2$ si e' fermata sul pavimento

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g$$
$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g$$
$$M = -T_2 R - T_1 r$$
$$\cdot\cdot\,\alpha = \frac{a_2}{R} = \frac{a_1}{r}$$
$$\rightarrow \begin{cases} T_1 = m_1 a_1 + m_1 g \\ T_2 = m_2 a_2 + m_2 g \\ I\alpha = \frac{1}{2} M R^2 \alpha = -\left(m_1 a_1 + m_1 g\right) r - \left(m_2 a_2 + m_2 g\right) R \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}MR^2\alpha = -\left(m_1\alpha r + m_1 g\right)r - \left(m_2\alpha R + m_2 g\right)R$$

$$\rightarrow \alpha\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2\right) = -\left(m_1 g r + m_2 g R\right)$$

$$\rightarrow \alpha = -\frac{\left(m_1 r + m_2 R\right)g}{\frac{1}{2}MR^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2}$$

$$\rightarrow a_1 = \alpha r = -\frac{\left(m_1 r + m_2 R\right)gr}{\frac{1}{2}MR^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2}$$

$$\rightarrow a_2 = \alpha R = -\frac{\left(m_1 r + m_2 R\right)gR}{\frac{1}{2}MR^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2}$$

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g$$

$$M = -T_1 r$$

$$\alpha = \frac{a_1}{r}$$

$$\rightarrow \begin{cases} T_1 = m_1 a_1 + m_1 g \\ I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha = -\left(m_1 a_1 + m_1 g\right)r \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}MR^2\frac{a_1}{r} = -\left(m_1 a_1 + m_1 g\right)r$$

$$\rightarrow a_1 = -\frac{2\left(m_1 a_1 + m_1 g\right)r^2}{MR^2}$$

$$\rightarrow a_1\left(1 + 2\frac{m_1 r^2}{MR^2}\right) = -g\frac{2m_1 r^2}{MR^2}$$

$$\rightarrow a_1 = -g\frac{2m_1 r^2}{MR^2 + 2m_1 r^2}$$