Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2015/16

Meccanica

Prova scritta – 04/07/2016

Problema 1

In una gara di tiro con l'arco il bersaglio e' posto in verticale ad una distanza $l=50\ m$ dall'arciere ed il suo centro geometrico si trova ad una altezza dal suolo uguale a quella da cui l'arciere scocca la freccia.
Sapendo che la velocita' iniziale della freccia e' di $100\ m/s$, calcolare:

a) I due possibili valori dell'angolo θ rispetto al suolo con cui l'arciere deve scoccare la freccia per i quali, trascurando l'attrito con l'aria, la freccia colpisce il centro geometrico del bersaglio

b) La tolleranza $\delta\theta$ sui valori di θ entro la quale si colpisce la regione centrale del bersaglio avente raggio pari a $10\ cm$.

$$x(t)=v_0\,cos\,\theta t \rightarrow t=\frac{x}{v_0\,cos\,\theta}$$

$$y(t)=v_0\,sin\,\theta t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\rightarrow y(x)=v_0\,sin\,\theta\frac{x}{v_0\,cos\,\theta}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\,cos\,\theta}\right)^2$$

$$y(l)=0\rightarrow v_0\,sin\,\theta\frac{l}{v_0\,cos\,\theta}-\frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v_0\,cos\,\theta}\right)^2=0$$

$$\rightarrow l\,tan\,\theta=\frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v_0\,cos\,\theta}\right)^2\rightarrow\frac{2l}{g}tan\,\theta=\left(\frac{l}{v_0\,cos\,\theta}\right)^2$$

$$\rightarrow\frac{2l}{g}\frac{sin\,\theta}{cos\,\theta}=\frac{l^2}{v_0^2\,cos^2\,\theta}\rightarrow\frac{2}{g}sin\,\theta=\frac{l}{v_0^2\,cos\,\theta}\rightarrow 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta=\frac{gl}{v_0^2}$$

$$\rightarrow sin\,2\theta=\frac{gl}{v_0^2}:\quad \alpha=arcsin\left(\frac{gl}{v_0^2}\right),\ \alpha\le\frac{\pi}{2}\rightarrow 2\theta=\alpha,\pi-\alpha$$

$$\rightarrow\theta=\begin{cases}\theta_1=\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{9.81\ 50}{10^4}\right)\approx\frac{1}{2}2.8^0=1.4^0\\ \theta_2=\frac{\pi}{2}-\theta_1\approx 88.6^0\end{cases}$$

$$y(l)=l\,tan\,\theta-\frac{gl^2}{2v_0^2}\frac{1}{cos^2\,\theta}$$

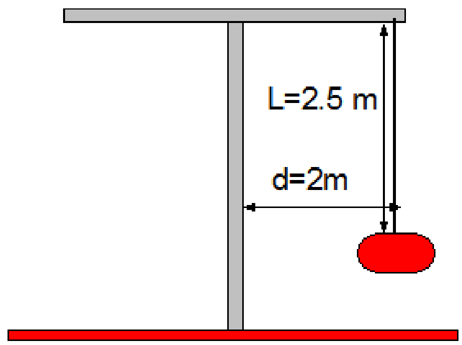
$$dy=\frac{dy}{d\theta}d\theta=\left(l\frac{1}{cos^2\,\theta}-\frac{gl^2}{2v_0^2}\frac{2\,cos\,\theta\,sin\,\theta}{cos^4\,\theta}\right)d\theta$$

$$\rightarrow dy=\left(\frac{l2v_0^2}{2v_0^2}\frac{cos^2\,\theta}{cos^4\,\theta}-\frac{gl^2}{2v_0^2}\frac{2\,cos\,\theta\,sin\,\theta}{cos^4\,\theta}\right)d\theta$$

$$\rightarrow dy=l\left(\frac{1-\frac{gl}{v_0^2}tan\,\theta}{cos^2\,\theta}\right)d\theta\rightarrow d\theta=\frac{dy}{l}\frac{cos^2\,\theta}{1-\frac{gl}{v_0^2}tan\,\theta}\approx\begin{cases}\frac{dy}{l},\quad \theta=\theta_1\sim 0\\ 0,\quad \theta=\theta_2\sim\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Problema 2

Il seggiolino di una giostra e'collegato all'albero girevole a distanza $d = 2\ m$, tramite una catena di lunghezza $L = 2.5\ m$ il cui carico di rottura e' $T_{max} = 2600\ N$ (v. figura)



Quando la giostra ruota in condizioni di regime la catena forma un angolo $\alpha = 30^0$ con la verticale.
Calcolare:

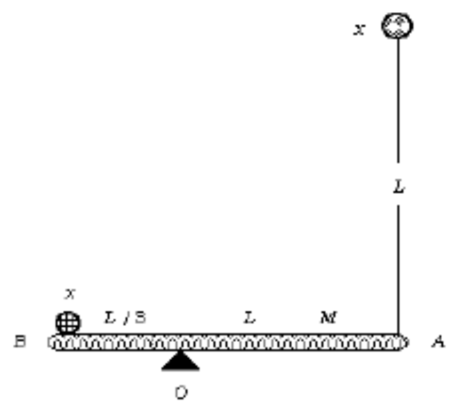
a) La velocita' angolare della giostra in condizioni di regime
b) Il valore massimo della massa che puo' stare sul seggiolino

$$ma = m\omega^2 R = T\sin\alpha$$
$$mg = T\cos\alpha$$
$$R = d + L\sin\alpha$$
$$\rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha} \rightarrow m\omega^2\left(d + L\sin\alpha\right) = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha$$
$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{d + L\sin\alpha}} \approx 1.32\ rad\ s^{-1}$$

$$M_{\max} = \frac{T_{\max}\cos\alpha}{g} \approx 229.8\ kg$$

Problema 3

Un'asta omogenea di lunghezza $L = 80\ cm$ e massa $M = 800$ g e' in equilibrio, imperniata nel punto O a distanza $L/3$ dall'estremo B, sul quale si trova una massa puntiforme x. Sull'estremo A cade da una quota L un corpo puntiforme, anch'esso di massa x, che rimane attaccato all'asta.



Calcolare:

a) Il valore di x
b) La quota raggiunta in seguito all'urto dalla massa x posta in B

Condizione di equilibrio (polo O):

$$xg\frac{L}{3}+\frac{M}{3}g\frac{L}{6}=\frac{2M}{3}g\frac{L}{3}$$

$$\rightarrow xg\frac{L}{3}=\frac{2}{9}MgL-\frac{1}{18}MgL=\frac{1}{6}MgL$$

$$\rightarrow x=\frac{1}{6}MgL\frac{3}{gL}=\frac{M}{2}=400\ g$$

$$v=\sqrt{2gL}$$

Cons. mom. angolare (polo O):

$$\frac{M}{2}\sqrt{2gL}\frac{2}{3}L=\frac{M}{2}v'\frac{L}{3}+I_{tot}\omega$$

$$v'=\frac{\omega L}{3}$$

$$I_{tot}=\frac{ML^2}{12}+\frac{ML^2}{36}+\frac{M}{2}\frac{4L^2}{9},$$ usando teor. assi paralleli

$$\rightarrow\frac{ML}{3}\sqrt{2gL}=v'\left(\frac{ML}{6}+ML\right)$$

$$\rightarrow v'=\frac{2}{7}\sqrt{2gL}$$ vel. inizial massa x lancata verso l'alto

$$v'=\sqrt{2gL'}=\frac{2}{7}\sqrt{2gL}\rightarrow L'=\frac{4}{49}L\approx 6.5\ cm$$