Corso di Laurea in Fisica

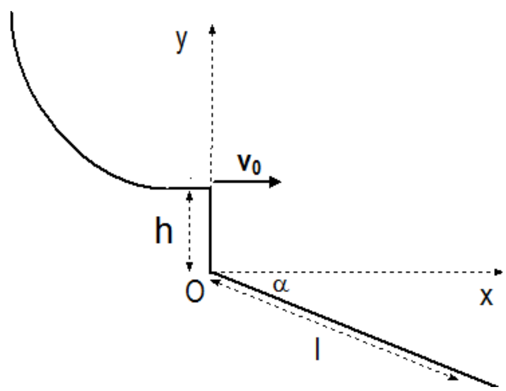
A.A. 2014/15

Meccanica

Prova scritta – 7/07/2015

Problema 1

In una gara di salto con gli sci il trampolino e' costruito come in figura



Al termine della prima parte della discesa lo sciatore si stacca dall'estremita' del trampolino, che e' sopraelevata di $h = 10\ m$ rispetto all'inizio della pista di atterraggio, con velocita' orizzontale v_0; alla fine del salto tocca la pista inclinata di $\alpha = -30^0$ rispetto all'orizzontale. Trascurando la resistenza dell'aria e altre forze di attrito:

1. Scrivere l'eq. della traiettoria in un sistema di riferimento cartesiano con origine in O
2. Calcolare la velocita' v_0 con cui lo sciatore deve arrivare al termine del trampolino per atterrare a una distanza $l = 100\ m$.

$$x(t) = v_0 t \rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$$

Eq. retta = Profilo pista

$$y = \tan \alpha x$$

$$\rightarrow h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = \tan \alpha x$$

$$\rightarrow h - \tan \alpha x = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{g x^2}{2(h - \tan \alpha x)}} = v_0$$

$$x = l \cos \alpha$$

$$\rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g l^2 \cos^2 \alpha}{2(h - l \tan \alpha \cos \alpha)}} = l \cos \alpha \sqrt{\frac{g}{2(h - l \sin \alpha)}}$$

$$\rightarrow v_0 \simeq 100 \cdot 0.866 \sqrt{\frac{9.81}{2[10 - 100 \cdot (-0.5)]}} = 86.6 \sqrt{\frac{9.81}{120}} = 86.6 \cdot 0.286$$

$$\rightarrow v_0 \simeq 24.8 \; m s^{-1}$$

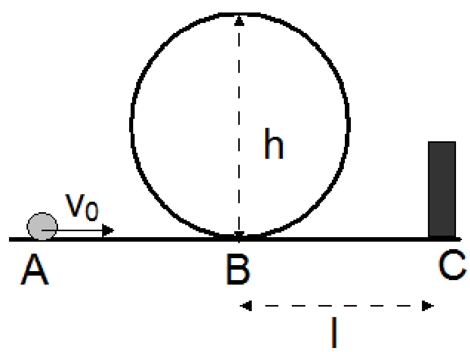
Problema 2

Un corpo di massa *m* e' lanciato dal punto *A* con velocita' iniziale v_0 verso il giro della morte di altezza $h = 50\ cm$, come in figura

1. Calcolare la velocita' minima v_0 che garantisce che il corpo completi il giro della morte e raggiunga il punto *B*

Successivamente il corpo raggiunge una regione di lunghezza $l = 1.5\ m$ con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.8$ e rimbalza contro una parete in *C* con urto elastico, ripartendo verso il giro della morte

2. Calcolare la velocita' minima v_0' che garantisce che il corpo, compiendo tutto il percorso, ritorni in *A*
3. Calcolare, per il caso considerato in 2., la velocita' con cui il corpo ripassa per *A*



$\frac{mv^2}{R} = mg + N$ f. centripeta nel punto piu' alto

$\rightarrow \frac{2mv^2}{h} = mg + N$

$N = 0 \rightarrow \frac{2mv^2}{h} = mg$ condizione minima per non staccarsi dalla guida

$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}mgh$

$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$ Cons. energia meccanica senza attriti

$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{4}mgh = \frac{5}{4}mgh$

$\rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gh}$

$W = -\mu_d mg 2l$ Lavoro forza di attrito nel percorso BC+CB

$\rightarrow$ En. cinetica iniziale minima per ritrovarsi in A:

$\rightarrow \frac{1}{2}mv'^2_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 2\mu_d mgl$

$\rightarrow v'_0 = \sqrt{v_0^2 + 4\mu_d gl}$

$v_A = v_0$

Problema 3

Un anello e un disco rotolano senza strisciare lungo un piano inclinato, partendo rispettivamente dalle quote h_a e h_d. Assumendo che h_a, h_d >> raggi del disco e dell'anello, calcolare:

1. Quanto deve valere il *rapporto* h_a/h_d perche' giungano alla fine del piano inclinato con la stessa velocita'
2. Il rapporto fra le rispettive energie cinetiche, se le loro masse sono uguali e se le altezze di partenza sono quelle calcolate in 1.
3. Il rapporto fra i rispettivi momenti angolari rispetto al centro di massa nelle condizioni descritte in 2, assumendo inoltre che i raggi siano uguali.

$$m_a g h_a = \frac{1}{2} m_a v^2 + \frac{1}{2} I_a \omega^2 = \frac{1}{2} m_a v^2 + \frac{1}{2} m_a R_a^2 \omega_a^2$$

$$m_d g h_d = \frac{1}{2} m_d v^2 + \frac{1}{2} I_d \omega^2 = \frac{1}{2} m_d v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m_d R_d^2 \omega_d^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} h_a = \dfrac{1}{2g} v^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{I_a}{m_a g}\omega_a^2 = \dfrac{1}{2g}\left(v^2 + R_a^2 \omega_a^2\right) \\ h_d = \dfrac{1}{2g} v^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{I_d}{m_d g}\omega_d^2 = \dfrac{1}{2g}\left(v^2 + \dfrac{1}{2} R_d^2 \omega_d^2\right) \end{cases}$$

$$v = \omega_{a,d} R_{a,d}$$

$$\rightarrow \begin{cases} h_a = \dfrac{1}{2g}\left(v^2 + v^2\right) = \dfrac{v^2}{g} \\ h_d = \dfrac{1}{2g}\left(v^2 + \dfrac{1}{2}\right) v^2 = \dfrac{3v^2}{4g} \end{cases} \rightarrow \frac{h_a}{h_d} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} E_{ka} = m_a g h_a \\ E_{kd} = m_d g h_d \end{cases} \rightarrow \frac{E_{ka}}{E_{kd}} = \frac{m_a h_a}{m_d h_d} = \frac{4 m_a}{3 m_d} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} L_a = I_a \omega_a \\ L_d = I_d \omega_d \end{cases} \rightarrow \frac{L_a}{L_d} = \frac{I_a \omega_a}{I_d \omega_d}$$

$$\begin{cases} \omega_a = \dfrac{v}{R_a} \\ \omega_d = \dfrac{v}{R_d} \end{cases} \rightarrow \frac{L_a}{L_d} = \frac{I_a R_d}{I_d R_a} = \frac{m_a R_a^2 R_d}{\frac{1}{2} m_d R_d^2 R_a} = 2$$