Corso di Laurea in Fisica

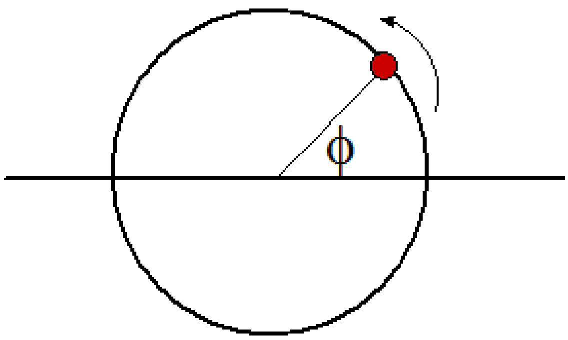
A.A. 2013/14

Meccanica

Prova scritta – 8/04/2014

Problema 1

Un punto materiale percorre una circonferenza di raggio R con velocita' angolare $\omega = \omega_0 - k\varphi$, dove $\omega_0 = 8\pi k,\ k$ costante. Assumendo la posizione iniziale $\varphi(0) = 0$, si determini:



a) L'angolo percorso in funzione del tempo, $\varphi(t)$; disegnare il grafico

b) Il tempo impiegato a percorrere 1,2,4 giri completi a)

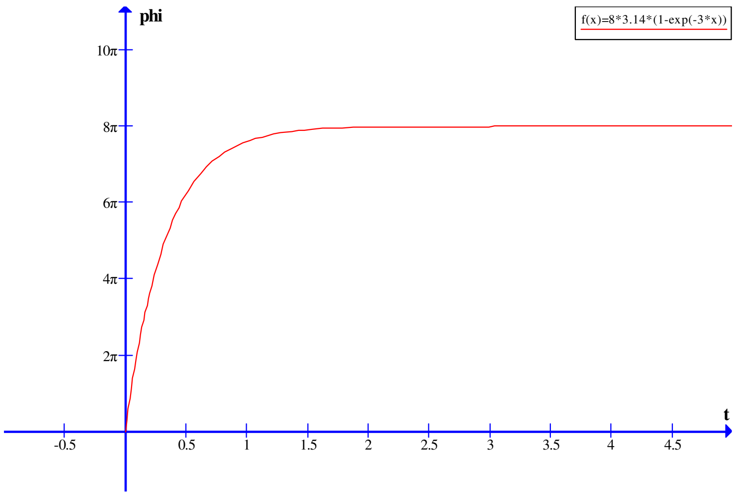
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - k\varphi$$

$$\rightarrow \frac{d\varphi}{\omega_0 - k\varphi} = dt \rightarrow \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega_0 - k\varphi} = t$$

$$\rightarrow -\frac{1}{k}\left[\ln\left(\omega_0 - k\varphi\right) - \ln\omega_0\right] = t$$

$$\rightarrow \frac{\omega_0 - k\varphi}{\omega_0} = e^{-kt} \rightarrow \omega_0 - k\varphi = \omega_0 e^{-kt}$$

$$\rightarrow \varphi = \frac{\omega_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) = 8\pi\left(1 - e^{-kt}\right)$$



b)

$$8\pi\left(1 - e^{-kt}\right) = 2\pi \rightarrow 1 - e^{-kt} = \frac{1}{4} \rightarrow kt = -\ln\left(1 - \frac{1}{4}\right) \rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{3}{4}$$

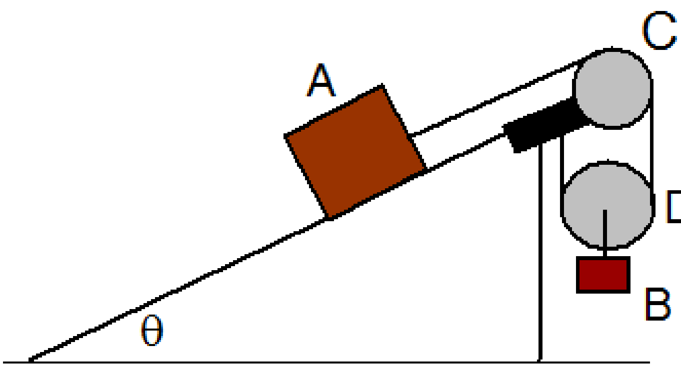
$$8\pi\left(1 - e^{-kt}\right) = 4\pi \rightarrow 1 - e^{-kt} = \frac{1}{2} \rightarrow kt = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) \rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\frac{1}{2}$$

$$8\pi\left(1 - e^{-kt}\right) = 8\pi \rightarrow t \rightarrow \infty$$

Problema 2

Si assuma, per il sistema in figura, che le due pulegge *C* e *D* e la fune abbiano massa trascurabile, e che la fune sia inestensibile; il solo attrito considerato sia quello fra il blocco *A* e il piano inclinato. Determinare, con le costanti indicate sotto:

a) Il coefficiente di attrito statico μ_s fra *A* e piano necessario a mantenere il sistema in quiete, distinguendo le due possibile direzioni per la forza di attrito e indicando l'unica fisicamente accettabile
b) L'accelerazione del blocco *B* e la tensione della fune se invece il sistema si muove, con attrito dinamico fra *A* e piano $\mu_d = 0.3$, sapendo che *B* scende



$$m_A = 1\ kg,\ m_B = 1.6\ kg,\ \theta = 30^0$$

a)

Equilibrio: 1

$m_A a_A = T_A \boxed{-} \mu_s m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = 0$ Attrito concorde a forza di gravita'

$m_B a_B = m_B g - T_B = 0$

$T_B = 2T_A$ puleggia D

$\rightarrow T_B = m_B g \rightarrow T_A = \frac{m_B g}{2}$

$\rightarrow \frac{m_B g}{2} - \mu_s m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = 0$

$\rightarrow \mu_s = \left(\frac{m_B g}{2} - m_A g \sin\theta\right)\frac{1}{m_A g \cos\theta} = \left(\frac{m_B}{2m_A \cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \approx 0.35$

Equilibrio: 2

$m_A a_A = T_A \boxed{+} \mu_s m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = 0$ Attrito concorde a tensione fune

$m_B a_B = m_B g - T_B = 0$

$T_B = 2T_A$ puleggia D

$\rightarrow T_B = m_B g \rightarrow T_A = \frac{m_B g}{2}$

$\rightarrow \frac{m_B g}{2} + \mu_s m_A g \cos\theta - m_A g \sin\theta = 0$

$\rightarrow \mu_s = \left(-\frac{m_B g}{2} + m_A g \sin\theta\right)\frac{1}{m_A g \cos\theta} = \left(-\frac{m_B}{2m_A \cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \approx -0.35$ non fisico

b) Nota: $a_B > 0 \rightarrow B$ scende $\rightarrow A$ sale

Caso 1: $m_A a_A = T_A \boxed{-} \mu_d m_A g\cos\theta - m_A g\sin\theta$ Attrito concorde a f.gravita'

$m_B a_B = m_B g - T_B = m_B g - 2T_A$

$a_A = 2a_B$ Carrucola mobile

$$\rightarrow \begin{cases} a_B = g - 2\dfrac{T_A}{m_B} \\ a_B = \dfrac{T_A - \mu_d m_A g\cos\theta - m_A g\sin\theta}{2m_A} = \dfrac{T_A}{2m_A} - \dfrac{\mu_d g\cos\theta}{2} - \dfrac{g\sin\theta}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow g - 2\frac{T_A}{m_B} = \frac{T_A}{2m_A} - \frac{\mu_d g\cos\theta}{2} - \frac{g\sin\theta}{2}$$

$$\rightarrow T_A\left(\frac{1}{2m_A} + \frac{2}{m_B}\right) = g\left(1 + \frac{\mu_d\cos\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{2}\right)$$

$$\rightarrow T_A = g\left(\frac{2 + \mu_d\cos\theta + \sin\theta}{2}\right)\frac{2m_A m_B}{m_B + 4m_A} \approx 9.81\ 1.38\ \frac{3.2}{5.6} \approx 7.74N$$

$$\rightarrow a_B = g - 2\frac{T_A}{m_B} \approx 9.81 - 2\frac{7.74}{1.6} \approx 0.135\ ms^{-2} \quad a_B > 0 \rightarrow B \text{ scende OK}$$

Caso 2: $m_A a_A = T_A \boxed{+} \mu_d m_A g\cos\theta - m_A g\sin\theta$ Attrito concorde a tensione fune

$m_B a_B = m_B g - T_B = m_B g - 2T_A$

$a_A = 2a_B$ Carrucola mobile

$$\rightarrow \begin{cases} a_B = g - 2\dfrac{T_A}{m_B} \\ a_B = \dfrac{T_A + \mu_d m_A g\cos\theta - m_A g\sin\theta}{2m_A} = \dfrac{T_A}{2m_A} + \dfrac{\mu_d g\cos\theta}{2} - \dfrac{g\sin\theta}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow g - 2\frac{T_A}{m_B} = \frac{T_A}{2m_A} + \frac{\mu_d g\cos\theta}{2} - \frac{g\sin\theta}{2}$$

$$\rightarrow T_A\left(\frac{1}{2m_A} + \frac{2}{m_B}\right) = g\left(1 - \frac{\mu_d\cos\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{2}\right)$$

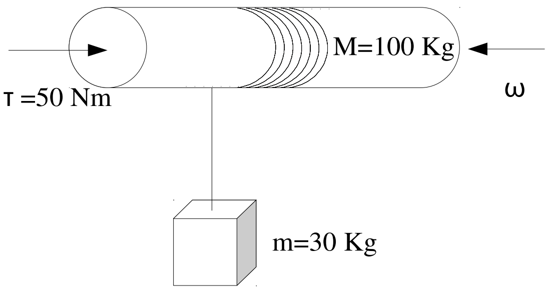
$$\rightarrow T_A = g\left(\frac{2 - \mu_d\cos\theta + \sin\theta}{2}\right)\frac{2m_A m_B}{m_B + 4m_A} \approx 9.81\ 0.99\ \frac{3.2}{5.6} \approx 5.55N$$

$$\rightarrow a_B = g - 2\frac{T_A}{m_B} \approx 9.81 - 2\frac{5.55}{1.6} \approx 2.87\ ms^{-2} \quad a_B > 0 \rightarrow B \text{ scende} \rightarrow \text{ KO}$$

Problema 3

Un cilindro orizzontale sottile cavo di raggio *R = 0.2 m* e massa *M = 100 kg* e' connesso ad un blocco di massa *m = 30 kg* tramite un cavo inestensibile e di massa trascurabile, inizialmente avvolto intorno al cilindro stesso. Il cilindro e' posto in rotazione quando il il blocco cade, mentre su di esso agisce un momento frenante $\tau = 50\ Nm$.

a) Determinare l'accelerazione angolare del cilindro.
b) Determinare la velocita' angolare in funzione del numero di giri compiuti dal cilindro.



$a)$

$a = \alpha R$

$T = m\left(g - a\right)$

$I = MR^2$

$\rightarrow I\alpha = TR - \tau = m\left(g - a\right)R - \tau = m\left(g - \alpha R\right)R - \tau$

$\rightarrow \alpha = \dfrac{mgR - \tau}{I + mR^2} = \dfrac{mgR - \tau}{\left(M + m\right)R^2} \sim 1.7\ s^{-2}$

$b)$

$v = \omega R$

$z = N2\pi R$ decremento nella quota

$W = \tau\theta = \tau\dfrac{z}{R}$ lavoro fatto dal mom. meccanico frenante

$\rightarrow mgz = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2 + \tau\dfrac{z}{R} = \dfrac{1}{2}m\omega^2R^2 + \dfrac{1}{2}MR^2\omega^2 + \tau\dfrac{z}{R}$

$\rightarrow mgz = \dfrac{1}{2}\left(m + M\right)\omega^2R^2 + \tau\dfrac{z}{R}$

$\rightarrow mgN2\pi R = \dfrac{1}{2}\left(m + M\right)\omega^2R^2 + \tau\dfrac{N2\pi R}{R} = \dfrac{1}{2}\left(m + M\right)\omega^2R^2 + N2\pi\tau$

$\rightarrow \dfrac{1}{2}\left(m + M\right)\omega^2R^2 = mgN2\pi R - N2\pi\tau$

$\rightarrow \omega = 2\sqrt{N\dfrac{\pi\left(mgR - \tau\right)}{\left(m + M\right)R^2}} \sim 4.6\sqrt{N}\ \ rad\ s^{-1}$