Corso di Laurea in Fisica

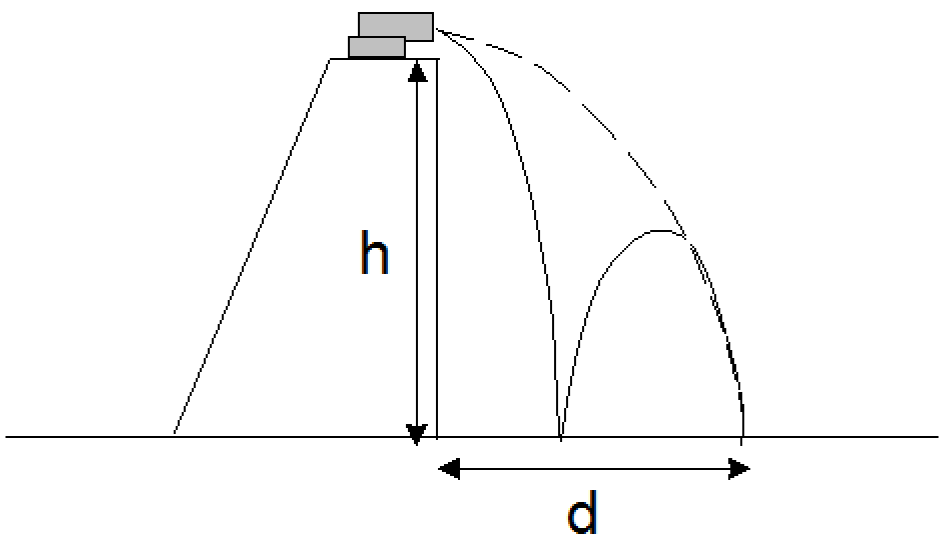
A.A. 2013/14

Meccanica

Prova scritta – 08/07/2014

Problema 1

Un cannone spara con velocita' iniziale v_0 e angolo di tiro $\alpha = 0$ (sparo orizzontale) un proiettile dalla cima di una montagna di altezza h, per colpire un bersaglio a distanza orizzontale d dal cannone; si trascura la resistenza dell'aria. Si assuma che, ad ogni urto con il terreno, la componente orizzontale della velocita' del proiettile rimanga invariata, mentre quella verticale si riduca a $f<1$ volte il suo valore prima della collisione.



1. Determinare il valore di v_0 necessario a colpire il bersaglio al primo contatto con il terreno
2. Determinare il valore di v_0 necessario a colpire il bersaglio al secondo contatto

$d = v_0 t$

1) Primo impatto:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\rightarrow v_0 = \frac{d}{t_1} = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = d\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

2) Secondo impatto:

$$t_2 = \frac{2v_y}{g}$$

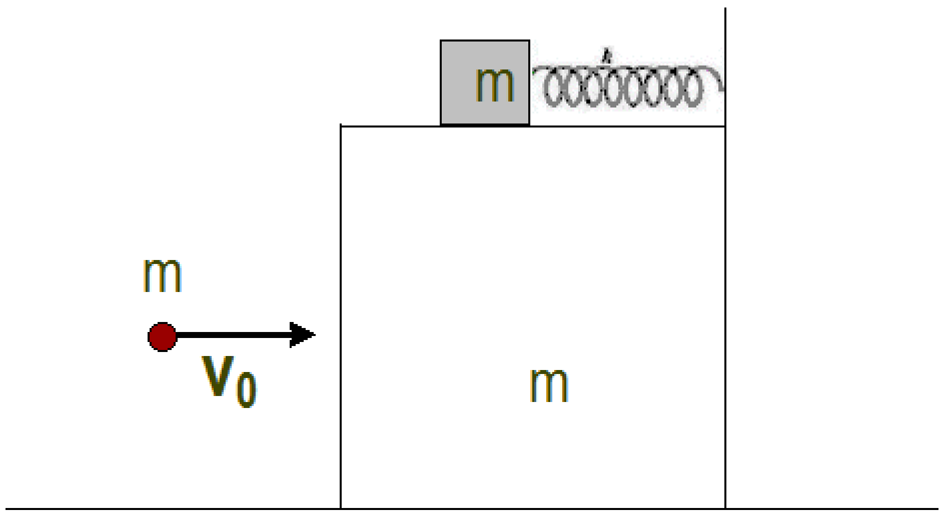
$v_y = fgt_1$ vel. subito dopo il I impatto

$$\rightarrow t_2 = \frac{2fgt_1}{g} = f\sqrt{\frac{8h}{g}}$$

$$\rightarrow v_0 = \frac{d}{t_1 + t_2} = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2f\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{d}{(1+2f)}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Problema 2

Una piattaforma di massa *m* appoggia su un piano orizzontale privo di attrito. Sulla piattaforma e' appoggiato un blocco, di massa *m*, collegato alla piattaforma da una molla di costante elastica *k* inizialmente alla lunghezza di riposo; piattaforma e blocco sono inizialmente fermi e non ci sono attriti fra piattaforma e blocco. Un punto materiale di massa *m* e velocita' v_0 urta orizzontalmente ed elasticamente la piattaforma



1. Determinare la velocita' del punto dopo l'urto
2. Determinare il massimo allungamento della molla

1) Urto elastico:

Cons. energia cinetica

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

$$\rightarrow v_0^2 = v^2 + V^2$$

Cons. quantita' di moto totale

v vel. punto materiale, V vel. piattaforma dopo l'urto

$$\rightarrow mv_0 = mv + mV$$

$$\rightarrow V = v_0 - v$$

$$\rightarrow v_0^2 = v^2 + V^2 = v^2 + \left(v_0 - v\right)^2 \rightarrow v_0^2 = v^2 + v_0^2 + v^2 - 2v_0 v$$

$$\rightarrow 2v\left(v - v_0\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} v = 0 \rightarrow V = v_0 & \text{OK} \\ v = v_0 \rightarrow V = 0 & \text{no urto} \end{cases}$$

2) Nel rif. del CM piattaforma-blocco:

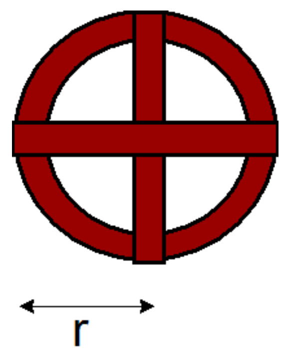
$$\frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 = \frac{1}{2}k\delta^2, \quad \mu = \frac{m}{2} \text{ m. ridotta, } \delta = \text{all. max molla}$$

$$v_{rel} = V - 0 = v_0$$

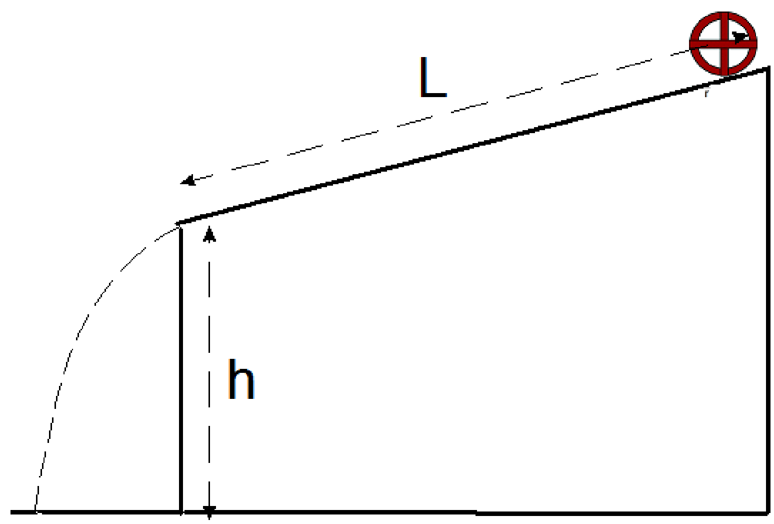
$$\rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\mu}{k}}\left|v_{rel}\right| = \sqrt{\frac{\mu}{k}}v_0 = \sqrt{\frac{m}{2k}}v_0$$

Problema 3

Su un anello di massa *3m* e raggio *r=0.1 m* sono fissate a croce due sbarre di lunghezza *2r* e masse *m* e *2m*, rispettivamente.



Il sistema, considerato come un corpo rigido, parte da fermo e rotola senza strisciare giu' per un piano inclinato di angolo $\theta = 10^0$ e lunghezza $L = 2m$, e quindi prosegue in volo libero da un'altezza $h = 1\ m$ fino a toccare il suolo.



1. Determinare il modulo della velocita' del centro di massa del corpo in fondo al piano inclinato
2. Trovare l'intervallo di tempo T fra la partenza e l'arrivo al suolo del corpo
3. Trovare la velocita' angolare del corpo subito prima di toccare il suolo

1) Cons. en. meccanica:

$$Mgy = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$M = m + 2m + 3m = 6m$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{12}m(2r)^2 + \frac{1}{12}2m(2r)^2 + 3mr^2 = 4mr^2$$

$$y = L\sin\theta$$

$\omega = \frac{v}{r}$ puro rotolamento

$$\rightarrow 6mgL\sin\theta = \frac{1}{2}6mv^2 + \frac{1}{2}4mr^2\frac{v^2}{r^2} = 5mv^2$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{6}{5}gL\sin\theta \rightarrow v = \sqrt{\frac{6}{5}gL\sin\theta} \approx 2.02\ ms^{-1}$$

2)Tempo di discesa lungo il piano inclinato:

$$t = \frac{L}{\bar{v}}$$

$$\bar{v} = \frac{v}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}gL\sin\theta}$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{L}{\bar{v}} = \frac{2L}{\sqrt{\frac{6}{5}gL\sin\theta}} = \sqrt{\frac{10L}{3g\sin\theta}} = \sqrt{\frac{20}{3\ 9.81\ 0.174}} \approx 1.98\ s$$

Tempo di caduta:

Trascurando la differenza fra y_{cm} all'uscita dal piano inclinato e r:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$$

$$v_{0y} = v\sin\theta$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}gt^2 + v\sin\theta t - h = 0$$

$$\rightarrow t_2 = -\frac{v\sin\theta}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v\sin\theta}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \approx 0.96\ s$$

$$\rightarrow T = t_1 + t_2 \approx 2.94\ s$$

3) $\omega = \frac{v}{r}$ puro rotolamento

$$\rightarrow \omega \approx 20.2\ rads^{-1}$$