Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2012/13

Meccanica

Prova scritta – 09/04/2013

Problema 1

Un punto materiale P percorre una traiettoria nel piano xy le cui equazioni parametriche sono, in un dato sistema di riferimento:

$$\begin{cases} x(t) = l\left(\omega t + \frac{1}{2}\sin\omega t\right) \\ y(t) = \frac{l}{2}\cos\omega t \end{cases} \qquad l,\omega \text{ parametri costanti}$$

a) Calcolare il vettore accelerazione istantanea $\boldsymbol{a}$, determinando gli istanti in cui i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{v}$ sono, rispettivamente, perpendicolari e paralleli
b) Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria in un istante in cui la velocita' e' massima in modulo
c) Calcolare i vettori **a**' e **v**' in un sistema di riferimento che ha velocita' relativa $\mathbf{v}_0 = \omega l\hat{\mathbf{i}}$ rispetto al riferimento precedente, e determinare l'angolo fra **a**' e **v**' in funzione del tempo

$$\mathbf{v}=\frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}}+\frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}}=\omega l\left(1+\frac{1}{2}\cos\omega t\right)\hat{\mathbf{i}}-\frac{\omega l}{2}\sin\omega t\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a}=-\frac{\omega^2 l}{2}\left(\sin\omega t\hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=\omega l\left(1+\frac{1}{2}\cos\omega t\right)\left(-\frac{\omega^2 l}{2}\sin\omega t\right)+\frac{\omega l}{2}\sin\omega t\frac{\omega^2 l}{2}\cos\omega t$$

$$=-\frac{\omega^3 l^2}{2}\sin\omega t-\frac{\omega^3 l^2}{4}\sin\omega t\cos\omega t+\frac{\omega^3 l^2}{4}\sin\omega t\cos\omega t=-\frac{\omega^3 l^2}{2}\sin\omega t$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=0\rightarrow\omega t=\pm n\pi\rightarrow t=\pm\frac{n\pi}{\omega},n=0,1,2,...$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{v}=\left(-\frac{\omega^2 l}{2}\sin\omega t\right)\left(-\frac{\omega l}{2}\sin\omega t\right)\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}}_{\hat{\mathbf{k}}}+\left(-\frac{\omega^2 l}{2}\cos\omega t\right)\omega l\left(1+\frac{1}{2}\cos\omega t\right)\underbrace{\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}}_{-\hat{\mathbf{k}}}$$

$$=\frac{\omega^3 l^2}{4}\sin^2\omega t\hat{\mathbf{k}}+\left(\frac{\omega^3 l^2}{2}\cos\omega t+\frac{\omega^3 l^2}{4}\cos^2\omega t\right)\hat{\mathbf{k}}=\frac{\omega^3 l^2}{4}\left(1+2\cos\omega t\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{v}=0\rightarrow 1+2\cos\omega t=0\rightarrow\cos\omega t=-\frac{1}{2}\rightarrow\omega t=\pm\frac{2}{3}\pi\pm 2n\pi$$

$$\rightarrow t=\pm\frac{2\pi}{3\omega}\pm\frac{2n\pi}{\omega}$$

$$v^2=\omega^2 l^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\cos\omega t\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\omega t\right]=\omega^2 l^2\left[1+\cos\omega t+\frac{1}{4}\cos^2\omega t+\frac{1}{4}\sin^2\omega t\right]$$

$$v^2=\omega^2 l^2\left[\frac{5}{4}+\cos\omega t\right]\rightarrow v=\omega l\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\omega t}\rightarrow v_{\max}=\frac{3}{2}\omega l\rightarrow a\big|_{v_{\max}}=\frac{\omega^2 l}{2}$$

$$a=\frac{v^2}{R}\rightarrow R\big|_{v_{\max}}=\frac{v^2}{a}=\frac{\frac{9}{4}\omega^2 l^2}{\frac{\omega^2 l}{2}}=\frac{9}{2}l$$

$$\mathbf{v}'=\omega l\left(1+\frac{1}{2}\cos\omega t\right)\hat{\mathbf{i}}-\frac{\omega l}{2}\sin\omega t\hat{\mathbf{j}}-\omega l\hat{\mathbf{i}}=\frac{1}{2}\omega l\left(\cos\omega t\hat{\mathbf{i}}-\sin\omega t\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\mathbf{a}'=\mathbf{a}=-\frac{\omega^2 l}{2}\left(\sin\omega t\hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\rightarrow\mathbf{v}'\cdot\mathbf{a}'=0\rightarrow\mathbf{v}'\perp\mathbf{a}'\quad\forall t$$

Problema 2

Un proiettile di massa $m = 50\ g$ viene sparato contro un blocco di massa $M = 5\ kg$, poggiato su un pavimento orizzontale; il coefficiente di attrito dinamico fra blocco e pavimento e' $\mu = 0.1$. Il proiettile ha velocita' $v_1 = 600\ ms^{-1}$ prima di entrare nel blocco, e $v_2 = 400\ ms^{-1}$ quando ne esce. Considerando trascurabile il tempo di attraversamento del blocco, determinare:

a) La velocita' del blocco dopo l'uscita del proiettile
b) Lo spazio percorso dal blocco prima di fermarsi
c) La frazione di energia cinetica iniziale complessivamente dissipata in calore

$$mv_1 = mv_2 + MV_2$$

$$\rightarrow V_2 = \frac{m}{M}\left(v_1 - v_2\right)$$

$$\rightarrow V_2 = \frac{0.05}{5}\left(600 - 400\right)\ ms^{-1} = 2\ ms^{-1}$$

$$v(t) = V_2 - \mu g t$$

$$\rightarrow t_{stop} = \frac{V_2}{\mu g}$$

$$x(t) = V_2 t - \frac{1}{2}\mu g t^2$$

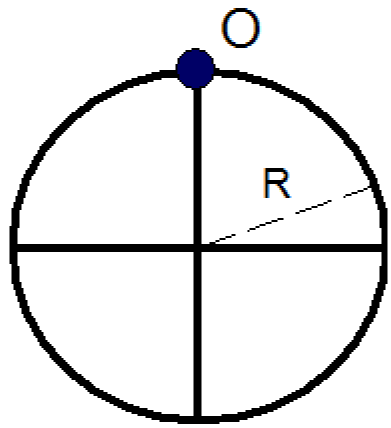
$$\rightarrow x\left(t_{stop}\right) = \frac{V_2^2}{\mu g} - \frac{1}{2}\mu g \frac{V_2^2}{\mu^2 g^2} = \frac{1}{2}\frac{V_2^2}{\mu g}$$

$$\rightarrow x\left(t_{stop}\right) = \frac{1}{2}\frac{4}{0.1\ \ 9.81}\ m = \frac{2}{0,981} = 2.039\ m$$

$$f = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2} = \frac{600^2 - 400^2}{600^2} = 0.55$$

Problema 3

Su un anello sottile e omogeneo, di massa M e raggio R, sono fissate due sbarre diametrali, ciascuna di massa M e lunghezza $2R$, come in figura.



Il sistema e' inizialmente sospeso nel piano verticale a un perno O, attorno al quale puo' ruotare senza attrito.

a) Calcolare il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse passante per O e perpendicolare al piano di oscillazione
b) Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio stabile

Anello:

$I_A = MR^2$ rispetto al centro

$\rightarrow I_A' = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$ rispetto al perno

Sbarra verticale:

$I_{S1} = \frac{1}{12} M \left(2R\right)^2 = \frac{1}{3} MR^2$ rispetto al centro

$\rightarrow I_{S1}' = \frac{1}{3} MR^2 + MR^2 = \frac{4}{3} MR^2$ rispetto al perno

Sbarra orizzontale:

$I_{S2} = \frac{1}{12} M \left(2R\right)^2 = \frac{1}{3} MR^2$ rispetto al centro

$\rightarrow I_{S2}' = \frac{1}{3} MR^2 + MR^2 = \frac{4}{3} MR^2$ rispetto al perno

$$\rightarrow I = I_A' + I_{S1}' + I_{S2}' = 2MR^2 + \frac{4}{3} MR^2 + \frac{4}{3} MR^2 = \frac{14}{3} MR^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_A = -MgR\sin\theta \\ \tau_{S1} = -MgR\sin\theta \\ \tau_{S2} = -MgR\sin\theta \end{array}\right\} \rightarrow \tau = -3MgR\sin\theta \text{ Mom. meccanico totale rispetto al perno}$$

$$\rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -3MgR\sin\theta$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{3MgR}{I}}_{\omega^2}\theta \simeq 0 \text{ piccole oscillazioni}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{3MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{14}{3}MR^2}{3MgR}} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{14R}{g}}$$