Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2011/12

Meccanica

Prova scritta – 9/7/2012

Problema 1

Un punto materiale si muove sul piano *xy* secondo le equazioni parametriche:

$$x(t) = 5\ t$$
$$y(t) = 6\ sen(\omega t)$$

con $\omega = \frac{\pi}{3} rad/s$ e x,y in metri.

Calcolare:

1) Il modulo della velocità *v* e dell'accelerazione *a* all'istante *t = 1 s*.
2) L'accelerazione normale alla traiettoria $\vec{a}_N$ all'istante *t = 1 s*.

$$\left.\begin{array}{l} v_x = 5 \\ v_y = 6\omega\cos\omega t \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{v} = 5\hat{\mathbf{i}} + 6\omega\cos\omega t\hat{\mathbf{j}}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{25 + 36\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$\rightarrow |\mathbf{v}(t=1)| = \sqrt{25 + \pi^2} \simeq 5.9 ms^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -6\omega^2\sin\omega t \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{a} = -6\omega^2\sin\omega t\hat{\mathbf{j}}$$

$$\rightarrow |\mathbf{a}(t=1)| = 6\frac{\pi^2}{9}\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 5.7 ms^{-1}$$

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_T \rightarrow \mathbf{u}_T = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{5\hat{\mathbf{i}} + 6\omega\cos\omega t\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{25 + 36\omega^2\cos^2\omega t}}$$

$$\rightarrow \mathbf{u}_T(t=1) = \frac{5\hat{\mathbf{i}} + \pi\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{25+\pi^2}}$$

$$\mathbf{a}_T(t=1) = \left[\mathbf{a}(t=1)\cdot\mathbf{u}_T(t=1)\right]\mathbf{u}_T(t=1)$$

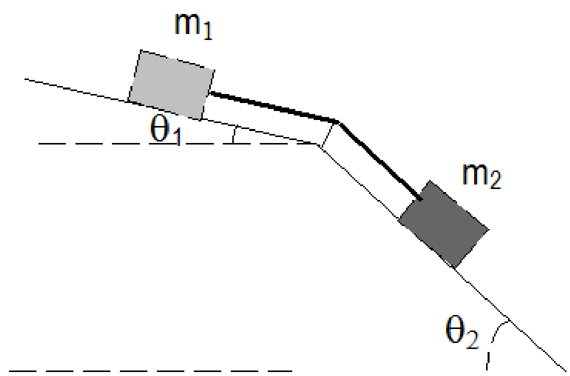
$$\rightarrow \mathbf{a}_T(t=1) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi^2\hat{\mathbf{j}}\cdot\frac{5\hat{\mathbf{i}} + \pi\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{25+\pi^2}}\right]\frac{5\hat{\mathbf{i}} + \pi\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{25+\pi^2}} = -\frac{\sqrt{3}\pi^3}{3\left(25+\pi^2\right)}\left(5\hat{\mathbf{i}} + \pi\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\mathbf{a}_N(t=1)=\mathbf{a}(t=1)-\mathbf{a}_T(t=1)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi^2\hat{\mathbf{j}}+\frac{\sqrt{3}\pi^3}{3(25+\pi^2)}(5\hat{\mathbf{i}}+\pi\hat{\mathbf{j}})$$

$$\mathbf{a}_N(t=1)=5\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\pi^2}{25+\pi^2}(\pi\hat{\mathbf{i}}-5\hat{\mathbf{j}})$$

Problema 2

Due blocchi di massa m_1 e $m_2 = \alpha\, m_1$, uniti da una fune inestensibile di massa trascurabile, che scorre senza attrito su un piolo, si muovono su un doppio piano inclinato, come in figura; i due tratti di fune scorrono parallelamente ai piani.



Per i seguenti valori delle costanti del problema:

θ_1 = *arcsin 3/5*
θ_2 = *arcsin 4/5*
μ_1=*1/4* coeff. di attrito dinamico sul tratto percorso da m_1

1) Calcolare il massimo coefficiente di attrito dinamico μ_2 che garantisce che la fune e' in tensione
2) Se $\mu_2 = 0.5\ \mu_2^{max}$ e $\alpha = 0.5$, calcolare la velocita' dei due blocchi quando hanno percorso, partendo da fermi, la distanza $L = 1.5\ m$

Fune in tensione: $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin\theta_1 + T - \mu_1 m_1 g \cos\theta_1 \\ m_2 a = m_2 g \sin\theta_2 - T - \mu_2 m_2 g \cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\theta_1 = \arcsin\frac{3}{5} \to \sin\theta_1 = \frac{3}{5} \to \cos\theta_1 = \frac{4}{5}$$

$$\theta_2 = \arcsin\frac{4}{5} \to \sin\theta_2 = \frac{4}{5} \to \cos\theta_2 = \frac{3}{5}$$

$$\begin{cases} m_1 a = \frac{3}{5} m_1 g + T - \frac{4}{5}\mu_1 m_1 g \\ \alpha m_1 a = \frac{4}{5}\alpha m_1 g - T - \frac{3}{5}\alpha\mu_2 m_1 g \end{cases}$$

$$a = g\,\frac{3 - 4\mu_1 + 4\alpha - 3\alpha\mu_2}{5(\alpha+1)}$$

$$T = m_1 a - \frac{3}{5} m_1 g + \frac{4}{5}\mu_1 m_1 g \geq 0$$

$$m_1 g\,\frac{3 - 4\mu_1 + 4\alpha - 3\alpha\mu_2}{5(\alpha+1)} - \frac{3}{5} m_1 g + \frac{4}{5}\mu_1 m_1 g \geq 0$$

$$\to \mu_2 \leq \mu_2^{\max} = \frac{2}{3}$$

Diminuzione quote:

$$h_1 = l\sin\theta_1 = \frac{3}{5} l$$

$$h_2 = l\sin\theta_2 = \frac{4}{5} l$$

$$m_1 g h_1 + m_2 g h_2 - \mu_1 m_1 \cos\theta_1 l - \mu_2 m_2 \cos\theta_2 l = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

$$\frac{3}{5} m_1 g l + \frac{4}{5}\alpha m_1 g l - \frac{1}{5} m_1 g l - \frac{1}{5}\alpha m_1 g l = \frac{1}{2} m_1 (1+\alpha) v^2$$

$$\to v = \sqrt{\frac{14}{15} g l} \simeq 3.7 m s^{-1}$$

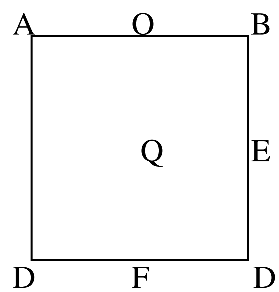
Problema 3

Una cornice rigida e' formata da 4 sbarrette di lato L e massa m, saldate insieme in modo da formare un quadrato. La cornice e' fissata al muro nel punto O (punto medio del lato superiore) e puo' oscillare senza attrito nel piano verticale.

1) Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile

Il sistema viene posto in un ascensore, che accelera verticalmente con accelerazione costante a.

2) Quale deve essere il valore di a perche' il periodo si riduca del *20%*?



Mom. d'inerzia rispetto ad O:

$$I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA}$$

$$I_{AB} = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_{BC} = I_{DA} = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(OE\right)^2 = \frac{7}{12} ml^2$$

$$I_{CD} = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(OF\right)^2 = \frac{13}{12} ml^2$$

$$\rightarrow I = \frac{7}{3} ml^2$$

$$CM : OQ = \frac{l}{2}$$

$$\rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -4mg \frac{l}{2} \sin\theta$$

Piccole oscillazioni:

$$\frac{7}{3} ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -2mgl\theta \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6g}{7l}} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{6g}}$$

$g' = g + a$, a diretta verso l'alto

$$T = \frac{4}{5} T_0 \rightarrow \sqrt{g'} = \frac{5}{4}\sqrt{g} \rightarrow g + a = \left(\frac{5}{4}\right)^2 g$$

$$\rightarrow a = \left(\frac{25}{16} - 1\right) g = \frac{9}{16} g$$