Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2014/15

Meccanica

Prova scritta – 10/04/2015

Problema 1

Una palla perfettamente elastica di massa $m = 0.1\ kg$ viene lasciata cadere sul pavimento da un'altezza h; viene misurato il tempo totale T che la palla impiega a cadere e risalire al primo rimbalzo ad un'altezza prefissata $k = 6\ m$

1. Determinare h in modo che T sia minimo
2. Supponendo che il contatto della palla col pavimento duri un tempo $\tau = 0.01\ s$, determinare la forza media che il pavimento esercita sulla palla quando h ha il valore determinato in 1.

$$T = T_{cad} + T_{sal}$$

$$\frac{1}{2} g T_{cad}^2 = h \to T_{cad} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$g T_{cad} = v_{fin} \to v_{fin} = \sqrt{2hg} = v_{in}$$

$$v_{in} T_{sal} - \frac{1}{2} g T_{sal}^2 = k \to T_{sal}^2 - \frac{2v_{in}}{g} T_{sal} + \frac{2k}{g} = 0$$

$$\to T_{sal} = \frac{v_{in}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{in}}{g}\right)^2 - \frac{2k}{g}} = \frac{\sqrt{2hg}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2hg}}{g}\right)^2 - \frac{2k}{g}}$$

$$\to T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \pm \sqrt{\frac{2\left(h-k\right)}{g}} = \sqrt{\frac{8h}{g}} - \sqrt{\frac{2\left(h-k\right)}{g}}$$

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{gh}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{g\left(h-k\right)}}$$

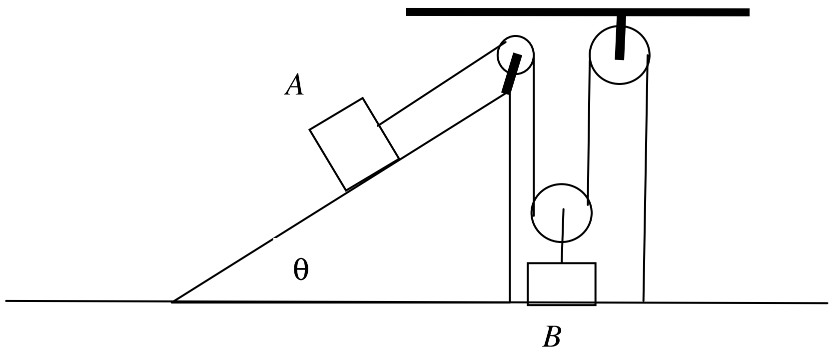
$$\sqrt{\frac{8}{gh}} - \sqrt{\frac{2}{g\left(h-k\right)}} = 0 \to \sqrt{\frac{8}{gh}} = \sqrt{\frac{2}{g\left(h-k\right)}}$$

$$\to \frac{8}{gh} = \frac{2}{g\left(h-k\right)} \to \frac{gh}{8} = \frac{g\left(h-k\right)}{2} \to 4gk = 3gh \to h = \frac{4}{3}k = 8 \ \ m$$

$$\left\langle F \right\rangle = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{2mv_{in}}{\tau} = \frac{2m}{\tau}\sqrt{2hg} \approx 251\, N$$

Problema 2

Un corpo *A* di massa m_A si trova all'altezza h = *0.4* m rispetto al suolo su un piano inclinato liscio con angolo $\theta = 30^0$ rispetto all'orizzontale. Il corpo e' collegato a una fune inestensibile e di massa trascurabile, il cui altro estremo e' collegato al suolo attraverso il sistema di carrucole ideali mostrato in figura.



Il corpo *B* di massa m_B e' attaccato alla carrucola mobile e inizialmente e' appoggiato sul pavimento.
Determinare:

1. Il valore massimo del rapporto m_A/m_B che garantisce che *B* rimanga a terra
2. Il modulo dell'accelerazione di *A* se $m_A/m_B=2$
3. Il modulo della massima velocita' raggiunta da *B* se $m_A/m_B=2$

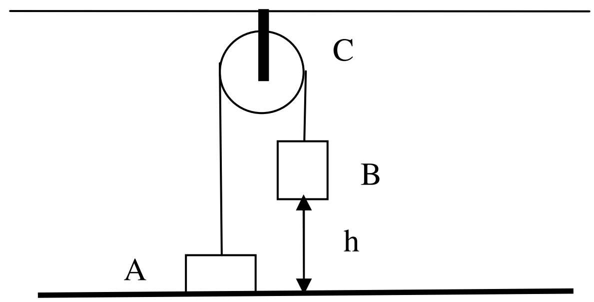
$$m_A a_A = m_A g \sin\theta - T = 0 \to T = m_A g \sin\theta$$
$$m_B a_B = 2T + N_B - m_B g = 0 \to N_B = m_B g - 2T \geq 0$$
$$\to m_B g \geq 2 m_A g \sin\theta$$
$$\to \frac{m_A}{m_B} \leq \frac{1}{2\sin\theta} = 1$$

$$m_A a_A = m_A g \sin\theta - T$$
$$m_B a_B = 2T - m_B g$$
$$a_B = \frac{1}{2} a_A \equiv \frac{1}{2} a \quad \text{carruc. mobile}$$
$$m_A a = m_A g \sin\theta - T \to T = m_A g \sin\theta - m_A a$$
$$m_B \frac{a}{2} = 2T - m_B g \to \frac{a}{2} = 2\frac{m_A}{m_B}\left(g \sin\theta - a\right) - g$$
$$\to a\left(\frac{1}{2} + 2\frac{m_A}{m_B}\right) = g\left(2\frac{m_A}{m_B}\sin\theta - 1\right)$$
$$\to a = \frac{g\left(2\cdot 2\sin\theta - 1\right)}{2\cdot 2 + \frac{1}{2}} = g\frac{1}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9} g \approx 2.18\ ms^{-2}$$

$$v_A^2 = 2a_A s = 2a_A \frac{h}{\sin\theta} = \frac{4}{9}\frac{hg}{\sin\theta}$$
$$v_B = \frac{v_A}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}\frac{hg}{\sin\theta}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{hg}{\sin\theta}} = \frac{1}{3}\sqrt{2hg} \approx 0.934\ ms^{-1}$$

Problema 3

Il sistema rappresentato in figura viene lasciato libero di muoversi sotto l'azione della forza peso.



Inizialmente il blocco A e' sul pavimento, mentre B si trova a un'altezza $h = 3\ m$ rispetto al pavimento. Trascurando gli attriti e la massa della fune, calcolare:

1. Il modulo della velocita' di B nel momento in cui tocca il pavimento, nell'ipotesi in cui la fune scorra nella carrucola senza porla in movimento
2. Lo stesso modulo calcolato in 1., ma nell'ipotesi in cui la fune ponga in movimento la carrucola senza strisciare; si consideri la carrucola come un disco omogeneo di raggio $R = 10\ cm$ e massa $M_C = 4\ kg$, libero di ruotare attorno al suo asse
3. Nel caso considerato in 2., assumendo un urto completamente anelastico fra B e pavimento, il rapporto fra l'en. cinetica dissipata nell'urto e l'en. cinetica del sistema un istante prima dell'urto stesso

$$m_A a = T - m_A g$$
$$m_B a = m_B g - T$$
$$\rightarrow (m_A + m_B) a = g (m_B - m_A)$$
$$\rightarrow a = g \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}$$
$$v^2 = 2ah = 2g \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} h \rightarrow v = \sqrt{2gh \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}}$$

$$m_B gh = m_A gh + \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$
$$I = \frac{1}{2} M_C R^2$$
$$\omega = \frac{v}{R} \rightarrow \omega^2 = \frac{v^2}{R^2}$$
$$\rightarrow (m_B - m_A) gh = \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2 + \frac{1}{4} M_C v^2 = \frac{1}{2} v^2 \left(m_A + m_B + \frac{1}{2} M_C \right)$$
$$\rightarrow v = \sqrt{2gh \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B + \frac{1}{2} M_C}}$$

$$E_{k(B)} = \frac{1}{2} m_B \frac{2(m_B - m_A) gh}{m_A + m_B + \frac{1}{2} M_C} = \frac{m_B (m_B - m_A)}{m_A + m_B + \frac{1}{2} M_C} gh$$
$E_{k(tot)} = (m_B - m_A) gh$ Cons. en. meccanica
$$\rightarrow R = \frac{E_{k(B)}}{E_{k(tot)}} = \frac{\frac{m_B (m_B - m_A)}{m_A + m_B + \frac{1}{2} M_C} gh}{(m_B - m_A) gh} = \frac{m_B}{m_A + m_B + \frac{1}{2} M_C}$$