Corso di Laurea in Fisica

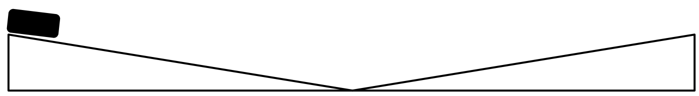
A.A. 2010/11

Meccanica

Prova scritta – 11/7/2011

Problema 1

Partendo da fermo da un'altezza h, un punto materiale di massa m scende e risale senza attrito lungo due piani inclinati identici di inclinazione α, posti l'uno di fronte all'altro come in figura



a) Calcolare la lunghezza di un pendolo semplice che ha lo stesso periodo di oscillazione
b) Calcolare l'impulso istantaneo che il punto riceve nel punto piu' basso del suo percorso

$l = \frac{h}{\sin\alpha}$ lunghezza piano

$l = \frac{1}{2} g \sin\alpha t^{*2}$

$\rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}}$ tempo di discesa/salita lungo un piano

$\rightarrow T = 4t^* = 4\sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} = 4\sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \frac{4}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ periodo di oscillazione

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2}T^2 g$$

$$\rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2}\frac{32h}{g\sin^2\alpha}g = \frac{8h}{\pi^2\sin^2\alpha}$$

$$v_{fondo} = at^* = g\sin\alpha\sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} = \sqrt{2lg\sin\alpha}$$

Componente y: cambia istantaneamente nel punto piu' basso

$$v_y = v_{fondo}\sin\alpha \rightarrow \Delta v = 2v_y = 2v_{fondo}\sin\alpha = 2\sqrt{2lg\sin^3\alpha}$$

Variazione istantanea della quantita' di moto:

$\Delta p = m\Delta v = I$ Impulso

$$\rightarrow I = 2m\sqrt{2lg\sin^3\alpha} = m\sqrt{8hg}\sin\alpha$$

Problema 2

Un anello rotola senza strisciare giu' per un piano inclinato di angolo θ, procedendo di pari passo con un blocco che scivola lungo lo stesso piano.

a) Si dimostri che il coefficiente di attrito dinamico fra blocco e piano e'

$$\mu_k = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Blocco:

$$F = Mg\sin\theta - \mu_k Mg\cos\theta$$

$$a = g\left(\sin\theta - \mu_k\cos\theta\right)$$

Anello:

$$Mg\sin\theta - f_s = Ma_{CM} \quad \text{lungo x}$$

$$\tau = I\alpha = f_s R \rightarrow \alpha = \frac{f_s R}{I}$$

$$a_{CM} = \alpha R = \frac{f_s R^2}{I} \rightarrow f_s = a_{CM}\frac{I}{R^2}$$

$$a_{CM} = g\sin\theta - \frac{f_s}{M} = g\sin\theta - a_{CM}\frac{I}{MR^2}$$

$$\rightarrow a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{MR^2}}$$

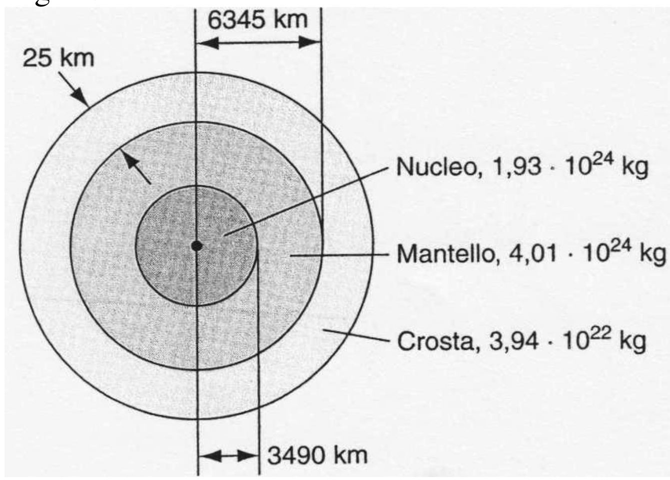
$$I = MR^2 \rightarrow a_{CM} = \frac{g}{2}\sin\theta$$

$$a = a_{CM} \rightarrow \sin\theta - \mu_k\cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\rightarrow \mu_k\cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta \rightarrow \mu_k = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Problema 3

La Terra puo' essere assimilata all'insieme di tre strati sferici di massa e dimensioni diverse, come in figura.



Assumendo forma perfettamente sferica e trascurando la rotazione, calcolare:

a) *g* alla superficie terrestre
b) *g* in fondo a un foro ideale praticato fino all'interfaccia crosta-mantello
c) *g* alla profondita' di *25 km* per una Terra omogenea di raggio *6370 km* e massa *5.98 10^{24} kg*

$$F = G\frac{mM}{R_T^2}$$

$$\rightarrow g_{\sup} = G\frac{M}{R_T^2} = G\frac{M_{cros}+M_{mant}+M_{nuc}}{R_T^2} = 6.67 10^{-11}\frac{5.98 10^{24}}{\left(6.37 10^{6}\right)^2} ms^{-2} = 9.83 ms^{-2}$$

$$\rightarrow g_{\text{cros-mant}} = G\frac{M_{mant}+M_{nuc}}{\left(R_T - s\right)^2} = 6.67 10^{-11}\frac{5.94 10^{24}}{\left(6.345 10^{6}\right)^2} ms^{-2} = 9.84 ms^{-2}$$

$$\rho_{omog} = \frac{M_{cros}+M_{mant}+M_{nuc}}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$$

$$\rightarrow g_{-25km} = G\frac{\rho_{omog}\frac{4}{3}\pi\left(R_T - s\right)^3}{\left(R_T - s\right)^2} = G\rho_{omog}\frac{4}{3}\pi\left(R_T - s\right) = G\frac{\left(M_{cros}+M_{mant}+M_{nuc}\right)\left(R_T - s\right)}{R_T^3}$$

$$= 6.67 10^{-11}\frac{5.98 10^{24}}{\left(6.37 10^{6}\right)^3} 6.345 10^{6} ms^{-2} = 9.79 ms^{-2}$$