Corso di Laurea in Fisica

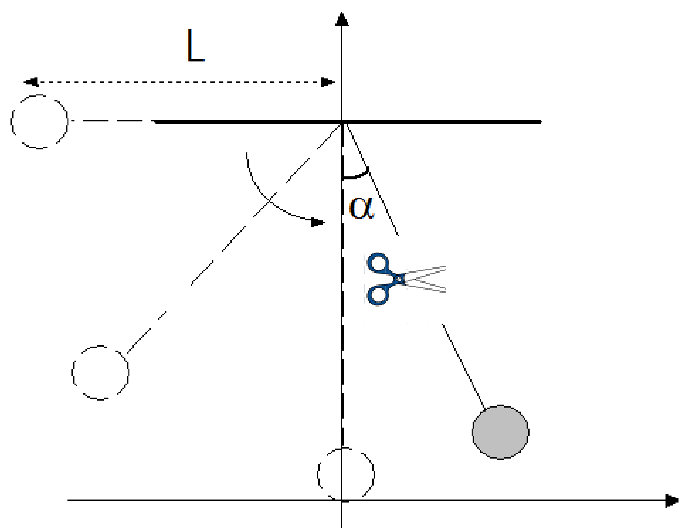
A.A. 2010/11

Meccanica

Prova scritta – 14/4/2011

Problema 1

Una palla attaccata a un filo inestensibile e privo di massa, fissato al soffitto e di lunghezza L circa uguale all'altezza del soffitto, viene rilasciata da ferma quando si trova all'altezza del punto di fissaggio del filo e a distanza L. Nel momento in cui la palla ha oltrepassato la verticale di un angolo α il filo viene tagliato.



Calcolare

a) l'altezza massima a cui arriva la palla rispetto al pavimento
b) la distanza del punto di atterraggio della palla dalla posizione in cui si trova quando e' sotto il punto di fissaggio del filo (nella figura, coincidente con l'origine)

Cons. energia tratto circolare:

$$mgL = mgL(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\rightarrow v_0^2 = 2gL\cos\alpha$$

Traiettoria

Tratto circolare: posizione e velocita' finali

$$x_0 = L\sin\alpha$$

$$y_0 = L(1-\cos\alpha)$$

$$v_0 = \sqrt{2gL\cos\alpha}$$

Cons. energia tratto parabolico inizio-apice:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgL(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}mv_{orizz}^2 + mgy_{\max}$$

$$v_{orizz} = v_0\cos\alpha$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}m2gL\cos\alpha + mgL(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}m2gL\cos\alpha\cos^2\alpha + mgy_{\max}$$

$$\rightarrow gL = gL\cos^3\alpha + gy_{\max}$$

$$\rightarrow y_{\max} = L(1-\cos^3\alpha)$$

Tratto parabolico: eq. orarie

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0\cos\alpha t \\ y(t) = y_0 + v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - x_0 = v_0\cos\alpha t \\ y'(t) = y(t) - y_0 = v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$y' = \tan\alpha x' - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x'^2$ Eq. traiettoria

$y = 0 \rightarrow y' = -y_0$ Ordinata atterraggio

$\rightarrow x'\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x'^2 = -L(1-\cos\alpha)$ Ascissa atterraggio

$$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x'^2 - x'\tan\alpha - L(1-\cos\alpha) = 0$$

$$\rightarrow x'^2 - 2\tan\alpha\cos^2\alpha\frac{v_0^2}{g}x' - \frac{2L}{g}(1-\cos\alpha)v_0^2\cos^2\alpha = 0$$

$$\rightarrow x'^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{v_0^2}{g}x' - \frac{2L}{g}(1-\cos\alpha)v_0^2\cos^2\alpha = 0$$

$$\rightarrow x' = \sin\alpha\cos\alpha\frac{v_0^2}{g} \pm \sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\frac{v_0^4}{g^2} + \frac{2L}{v_0^2}(1-\cos\alpha)\frac{v_0^4}{g^2}g\cos^2\alpha}$$

$$\rightarrow x' = \sin\alpha\cos\alpha\frac{v_0^2}{g} \pm \cos\alpha\frac{v_0^2}{g}\sqrt{\left(1-\cos^2\alpha\right) + \frac{2Lg}{v_0^2}(1-\cos\alpha)}$$

$$\rightarrow x' = \frac{v_0^2}{g}\cos\alpha\left[\sin\alpha \pm \sqrt{\left(1-\cos^2\alpha\right) + \frac{2Lg}{v_0^2}(1-\cos\alpha)}\right]$$

$$v_0^2 = 2gL\cos\alpha$$

$$\rightarrow x' = 2L\cos^2\alpha\left[\sin\alpha \pm \sqrt{\left(1-\cos^2\alpha\right) + \frac{(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}}\right]$$

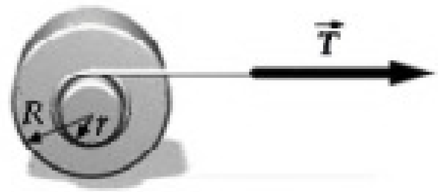
$$\rightarrow x' = 2L\cos^2\alpha\left[\sin\alpha \pm \sqrt{-\cos^2\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}}\right]$$

$$\rightarrow x = L\left[\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha \pm 2\cos^2\alpha\sqrt{-\cos^2\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}}\right]$$

$$\rightarrow x = L\left[\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha + 2\sqrt{\cos^3\alpha - \cos^6\alpha}\right]$$

Problema 2

Un disco di massa M e raggio R e' accelerato tramite una forza $\boldsymbol{T}$, applicata orizzontalmente, tramite un filo inestensibile e privo di massa, a un perno di raggio r e massa trascurabile collegato all'asse del disco.



Se il disco rotola senza strisciare, calcolare:

a) l'accelerazione del CM del disco
b) la forza di attrito fra disco e pavimento

Eq. cardinali:

$F = T + f = ma$

$Tr - fR = I\alpha$ Mom. riferiti al CM (asse)

$I = \frac{1}{2}mR^2$ Mom. inerzia di un disco rispetto all'asse

$\alpha = \frac{a}{R}$ Puro rotolamento

$$\rightarrow Tr - fR = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} = \frac{1}{2}maR$$

$$\rightarrow f = \frac{1}{R}\left(Tr - \frac{1}{2}maR\right) = T\frac{r}{R} - \frac{1}{2}ma$$

$$\rightarrow a = \frac{T+f}{m} = \frac{T + T\frac{r}{R} - \frac{1}{2}ma}{m}$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}a = \frac{T}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

$$\rightarrow a = \frac{2}{3}\frac{T}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

$$f = T\frac{r}{R} - \frac{1}{2}ma = T\frac{r}{R} - \frac{T}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

$$\rightarrow f = T\left[\frac{r}{R} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right]$$

$$\rightarrow f = \frac{T}{3}\left(\frac{2r}{R} - 1\right)$$

Problema 3

Un oggetto di massa pari a 2 kg entra in collisione elastica con un altro oggetto a riposo e continua a muoversi nella direzione primitiva con un quarto della velocità iniziale.

a) Qual è la massa dell'oggetto investito?
b) Quale è la velocità di quest'ultimo oggetto dopo l'urto?

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2$$

$$\boldsymbol{p}'_1 \parallel \boldsymbol{p}_1 \rightarrow \boldsymbol{p}'_2 \parallel \boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}$$

$\rightarrow$ Urto unidimensionale

$$p_1 = p'_1 + p'_2$$

$$\rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\rightarrow v'_2 = \frac{m_1}{m_2}\left(v_1 - v'_1\right)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

$$\rightarrow m_1 v_1^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \left(v_1 - v'_1\right)^2$$

$$\rightarrow v_1^2 = v'^2_1 + \frac{m_1}{m_2}\left(v_1 - v'_1\right)^2$$

$$v'_1 = \frac{v_1}{4} \rightarrow v_1 - v'_1 = \frac{3}{4} v_1$$

$$\rightarrow v_1^2 = \frac{v_1^2}{16} + \frac{m_1}{m_2}\frac{9}{16} v_1^2$$

$$\rightarrow 16 = 1 + 9\frac{m_1}{m_2} \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{15}{9}$$

$$\rightarrow m_2 = \frac{9}{15} m_1 = \frac{9}{15} \cdot 2\ kg \approx 1.2 kg$$

$$v'_2 = \frac{m_1}{m_2}\left(v_1 - v'_1\right) = \frac{15}{9}\frac{3}{4} v_1 = \frac{5}{4} v_1$$