Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2011/12

Meccanica

Prova scritta – 15/3/2012

Problema 1

Un'automobile parte da ferma con accelerazione costante a. Dopo un tempo T dalla stessa origine e nella stessa direzione viene lanciato un pallone con velocita' costante v_0.

a) Determinare i diversi casi possibili per l'incontro fra pallone e automobile (nessun incontro, un incontro, piu' di un incontro) originati dalla relazione fra v_0 e a,T
b) Nel caso di un solo incontro, determinarne l'istante

a)

$$x_{auto} = \frac{1}{2}at^2$$

$$x_{pallone} = \begin{cases} v_0\left(t-T\right), & t > T \\ 0, & t < T \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}at^2 = v_0\left(t-T\right) \rightarrow \frac{1}{2}at^2 - v_0t + v_0T = 0$$

$$\rightarrow t^2 - \frac{2v_0}{a}t + \frac{2v_0T}{a} = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 - \frac{2v_0T}{a}} = \frac{v_0}{a}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2aT}{v_0}}\right]$$

$v_0 > 2aT$: 2 soluzioni

$v_0 = 2aT$: 1 soluzione

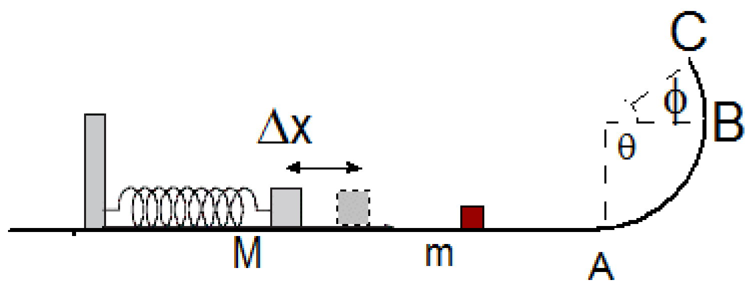
$v_0 < 2aT$: no soluzioni

b)

$$\rightarrow t = \frac{v_0}{a} = 2T$$

Problema 2

Un blocco di massa M si muove senza attrito su un pavimento orizzontale, dopo essere stato 'sparato' da un molla inizialmente compressa della lunghezza Δx. Il blocco urta poi elasticamente contro un altro blocco di massa m, proseguendo la sua corsa lungo una guida a forma di arco di circonferenza di raggio R, priva di attrito e posta nel piano verticale, fino ad arrivare con velocita' nulla nel punto B (θ=90°).. Il blocco m si muove anch'esso lungo la stessa guida, abbandonandola nel punto C (ϕ=30°) indicato nella figura.



Nel caso in cui Δx sia uguale a $\sqrt{\dfrac{8MgR}{k}}$ calcolare

a) il valore di m
b) l'altezza massima rispetto al pavimento raggiunta da m nella sua traiettoria dopo che ha lasciato la guida

a) $\Delta x \equiv x$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{M}}x$$

$$\left.\begin{array}{l} Mv = Mv' + mv'' \\ \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mv''^2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} v' = v - \frac{m}{M}v'' \\ v'^2 = \frac{k}{M}x^2 - \frac{m}{M}v''^2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(v - \frac{m}{M}v''\right)^2 = \cancel{v^2} + \left(\frac{m}{M}\right)^2 v''^2 - 2vv''\frac{m}{M} = \cancel{\frac{k}{M}x^2} - \frac{m}{M}v''^2$$

$$\rightarrow \left(\frac{m}{M}\right)^2 v''^2 - 2vv''\frac{m}{M} + \frac{m}{M}v''^2 = 0 \rightarrow \left[\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \frac{m}{M}\right]v''^2 = 2vv''\frac{m}{M}$$

$$\rightarrow \left[\left(\frac{m}{M}\right)^{\cancel{2}} + \cancel{\frac{m}{M}}\right]v'' = 2v\cancel{\frac{m}{M}} \rightarrow v'' = \frac{2v}{1 + \frac{m}{M}} = v\frac{2M}{M+m}$$

$$\rightarrow v' = v - \frac{m}{M}v'' = v\left(1 - \frac{2\frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}\right) = v\frac{1 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} = v\frac{M-m}{M+m}$$

$$\frac{1}{2}Mv'^2 = \frac{1}{2}Mv^2\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 = MgR$$

$$\rightarrow \frac{M-m}{M+m} = \frac{\sqrt{2gR}}{v} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2gRM}{k}} \rightarrow M - m = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2gRM}{k}}(M+m)$$

$$\rightarrow m\left(1 + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2gRM}{k}}\right) = M\left(1 - \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2gRM}{k}}\right)$$

$$\rightarrow m = M\frac{1 - \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2gRM}{k}}}{1 + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2gRM}{k}}} = M\frac{1 - \sqrt{\frac{k}{8MgR}}\sqrt{\frac{2gRM}{k}}}{1 + \sqrt{\frac{k}{8MgR}}\sqrt{\frac{2gRM}{k}}} = M\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow m = \frac{M}{3}$$

b)

$$v'' = \frac{2v}{1+\frac{m}{M}} = v\frac{2M}{M+m}$$

$$\frac{1}{2}mv''^2 = mgh + \frac{1}{2}mv'''^2 = mgR\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}mv'''^2 = \frac{3}{2}mgR + \frac{1}{2}mv'''^2$$

$$\rightarrow v'''^2 = v''^2 - 3gR \rightarrow v''' = \sqrt{v''^2 - 3gR} = \sqrt{4v^2\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 - 3gR}$$

$$\phi = \frac{\pi}{6} \rightarrow \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} v_x''' = -v'''\sin\phi \\ v_y''' = v'''\cos\phi \end{cases} \rightarrow u_y = v'''\cos\phi - gt$$

$$u_y = 0 \rightarrow \overline{t} = \frac{v'''\cos\phi}{g} = \frac{\sqrt{3}v'''}{2g}$$

$$y = y_0 + \frac{\sqrt{3}v'''}{2}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y_{\max} = y_0 + \frac{\sqrt{3}v'''}{2}\overline{t} - \frac{1}{2}g\overline{t}^2$$

$$y_0 = R\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}R$$

$$\rightarrow y_{\max} = \frac{3}{2}R + \frac{\sqrt{3}v'''}{2}\frac{\sqrt{3}v'''}{2g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{3}v'''}{2g}\right)^2 = \frac{3}{2}R + \frac{3v'''^2}{4g} - \frac{3v'''^2}{8g} = \frac{3}{2}R + \frac{3v'''^2}{8g}$$

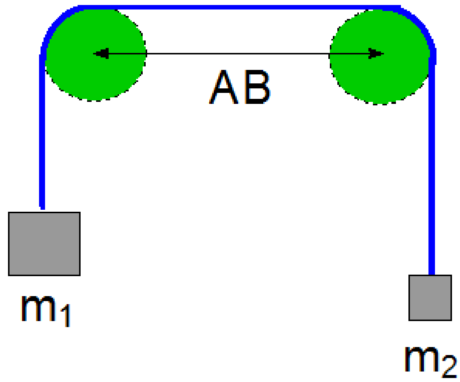
$$\rightarrow y_{\max} = \frac{3}{2}R + \frac{3}{8g}\left[4v^2\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 - 3gR\right] = \frac{3}{2}R + \frac{3v^2}{2g}\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 - \frac{9}{8}R$$

$$\rightarrow y_{\max} = \frac{3}{8}R + \frac{3v^2}{2g}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{3}{8}R + \frac{3k}{2gM}x^2\frac{9}{16} = \frac{3}{8}R + \frac{3\cancel{k}}{2\cancel{gM}}\frac{\cancel{8}\,\cancel{gM}R}{\cancel{k}}\frac{9}{2\cancel{16}}$$

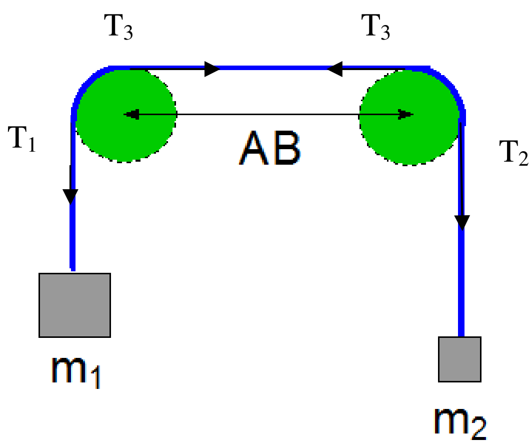
$$\rightarrow y_{\max} = \frac{3}{8}R + \frac{27}{4}R = \frac{57}{8}R$$

Problema 3

Due dischi identici di massa *m* sono liberi di ruotare senza attrito attorno al loro centro, essendo fissati alla distanza *AB*. Una fune inestensibile e di massa trascurabile collega le due masse m_1 e $m_2=m_1/2$ = 5 *kg*. Al tempo *t=0* il sistema viene lasciato libero: si osserva la massa m_1 scendere con accelerazione *a= g/10*.



a) Calcolare la tensione della fune fra i due dischi
b) Calcolare l'energia cinetica dei due dischi quando m_1 e' scesa di *L=1 m*



a) Scegliendo accelerazione $a \quad +va$ verso l'alto ($\leftarrow m_1$ scende):

$$\begin{cases} m_2 a = T_2 - m_2 g \\ m_1 a = -T_1 + m_1 g \\ I\alpha = T_3 R - T_2 R \\ I\alpha = -T_3 R + T_1 R \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} T_2 = m_2(a+g) \\ T_1 = m_1(g-a) \\ \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} = T_3 R - m_2(a+g)R \\ \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} = m_1(-a+g)R - T_3 R \end{cases}$$

$$\rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m + m_1 + m_2}g = \frac{2m_2 - m_2}{m + 2m_2 + m_2}g = \frac{m_2}{m + 3m_2}g$$

$$\rightarrow a = \frac{g}{10} \rightarrow \frac{1}{\frac{m}{m_2} + 3} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{m}{m_2} = 7$$

$$\frac{1}{2}ma + m_2(a+g) = T_3 \ \rightarrow T_3 \ = g\left(m\frac{1}{20} + m_2\frac{11}{10}\right) = m_2 g\left(\frac{7}{20} + \frac{11}{10}\right)$$

$$\rightarrow T_3 \ = 71.1 \ N$$

b)

$$a = g\frac{m_2}{m + 3m_2} \rightarrow v^2 = 2ah = 2gh\frac{m_2}{m + 3m_2}$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{v^2}{R^2} = \frac{2gh}{R^2}\frac{m_2}{m + 3m_2}$$

$$\rightarrow E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\frac{2gh}{R^2}\frac{m_2}{m + 3m_2} = \frac{1}{2}\frac{mm_2 gh}{m + 3m_2}$$

$$\rightarrow E_{k(tot)} = 2E_k = \frac{mm_2 gh}{m + 3m_2} = 34.3 \ J$$