Corso di Laurea in Fisica

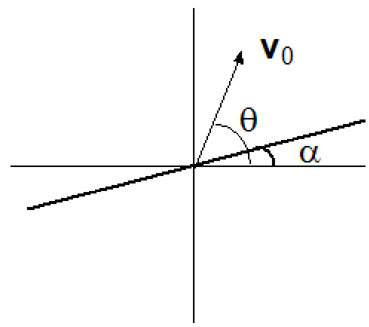
A.A. 2011/12

Meccanica

Prova scritta – 18/9/2012

Problema 1

Un proiettile di massa m viene lanciato con velocita' iniziale v_0 e angolo θ rispetto all'orizzontale da un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale



1. Scegliendo un opportuno sistema di coordinate determinare la traiettoria del proiettile in funzione di v_0 e θ.
2. Per quale valore di θ lo spazio percorso in orizzontale e' massimo?

Origine nel punto d lancio

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta\ t & \rightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta} \\ y = v_0 \sin\theta\ t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y = \tan\theta\ x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

$$\begin{cases} y = \tan\alpha\ x \\ y = \tan\theta\ x - \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 \end{cases} \rightarrow \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x = \tan\theta - \tan\alpha$$

$$\rightarrow x = \left(\tan\theta - \tan\alpha\right) \frac{2v_0^2}{g} \cos^2\theta = \frac{v_0^2}{g}\left(\underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta} - 2\tan\alpha\cos^2\theta\right)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g}\left(2\cos 2\theta + 4\tan\alpha\sin\theta\cos\theta\right) = \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos 2\theta + \tan\alpha\sin 2\theta\right)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 0 \rightarrow \left(\cos 2\theta + \tan\alpha\sin 2\theta\right) = 0$$

$$\rightarrow \tan 2\theta = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\cot\alpha$$

$$-\cot\alpha = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\alpha + \left(2k-1\right)\frac{\pi}{2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

$$\rightarrow 2\theta = \alpha + \left(2k-1\right)\frac{\pi}{2}$$

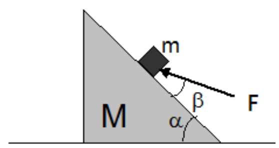
$$\rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2} + \left(2k-1\right)\frac{\pi}{4}, k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

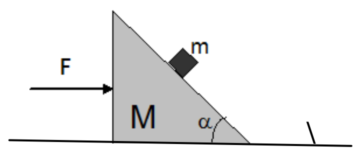
Per avere $\theta \in \left[\alpha, \alpha + \pi\right] : k = 1, 2$

$$\rightarrow \theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2} & \text{minimo} \\ \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2} & \text{massimo} \end{cases}$$

Problema 2

Un corpo puntiforme di massa m = 100 g e' appoggiato sulla faccia, inclinata di un angolo $\alpha = 45^0$, di un blocco di massa $M = 20\ m$ mobile senza attrito su un pavimento orizzontale. Fra il corpo e il blocco c'e' attrito statico con coefficiente $\mu_s=0.5$.





1. Determinare il minimo e massimo valore della forza F che si deve applicare al corpo di massa m perche' resti immobile rispetto al blocco, se $\boldsymbol{F}$ viene applicata con un angolo $\beta = 30^0$ rispetto al piano inclinato e il blocco viene fissato al pavimento
2. Determinare minimo e massimo di F per mantenere m ferma rispetto a M, se $\boldsymbol{F}$ viene applicata orizzontalmente al blocco M libero di scivolare sul pavimento

m fermo rispetto a M : accelerazione relativa nulla

1.

$F_{\min}$: Attrito verso l'alto $F_a = \mu_s N, N$ forza normale

$\perp$ al piano: $0 = mg\cos\alpha - N + F_{\min}\sin\beta$

$\|$ al piano: $0 = mg\sin\alpha - \mu_s N - F_{\min}\cos\beta$

$N = mg\cos\alpha + F_{\min}\sin\beta$

$\mu_s\left(mg\cos\alpha + F_{\min}\sin\beta\right) = mg\sin\alpha - F_{\min}\cos\beta$

$F_{\min}\left(\cos\beta + \mu_s\sin\beta\right) = mg\left(\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha\right)$

$$\rightarrow F_{\min} = \frac{mg\left(\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha\right)}{\cos\beta + \mu_s\sin\beta} \approx 0.31N$$

$F_{\max}$: Attrito verso il basso $F_a = \mu_s N, N$ forza normale

$\|$ al piano: $0 = mg\sin\alpha + \mu_s N - F_{\max}\cos\beta$

$N = mg\cos\alpha + F_{\max}\sin\beta$

$\rightarrow F_{\max}\left(-\cos\beta + \mu_s\sin\beta\right) = -mg\left(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha\right)$

$$\rightarrow F_{\max} = mg\frac{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}{\cos\beta - \mu_s\sin\beta} \approx 1.69N$$

2. Sistema di riferimento di M e m, che hanno la stessa accelerazione a :

Su m anche forza apparente $F' = ma$

Stesse espressioni per $F_{\min}', F_{\max}'$ con $\beta = \alpha$

$$\rightarrow F_{\min}' = mg\frac{\left(\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha\right)}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha} \rightarrow a_{\min}' = \frac{F_{\min}'}{m} = g\frac{\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha} = \frac{g}{3}$$

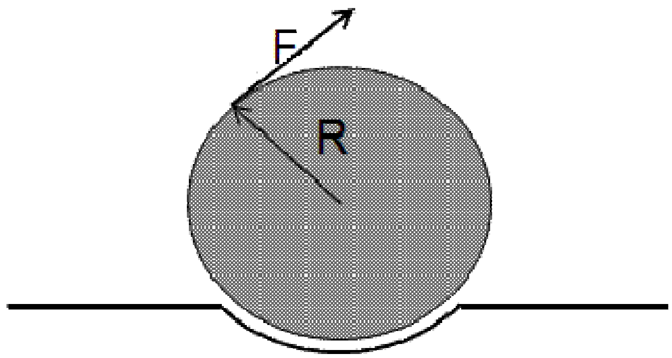
$$\rightarrow F_{\max}' = mg\frac{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha} \rightarrow a_{\min}' = \frac{F_{\max}'}{m} = g\frac{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha} = 3g$$

$\rightarrow F_{\min} = \left(m + M\right)a_{\min}' \approx 6.86N$

$\rightarrow F_{\max} = \left(m + M\right)a_{\max}' \approx 61.7N$

Problema 3

In una piazzetta è stata posta una fontana formata da una sfera di granito (densità $d = 2750\ kg/m^3$) di raggio $R = 0.6\ m$ appoggiata in un incavo del pavimento.



Un sistema idraulico pompa un getto d'acqua fra la sfera e l'incavo del pavimento in modo che la sfera sia libera di ruotare senza attrito intorno al suo centro. Un ragazzino si avvicina alla fontana e mette in rotazione la sfera (inizialmente ferma) applicando una forza costante tangente alla sfera.

1. Calcolare l'intensità della forza necessaria affinché dopo 30 secondi la velocità angolare sia pari a mezzo giro al secondo.

$$m = d\frac{4}{3}\pi R^3 = 2.75\ 10^3\ \frac{4}{3}\ 3.14\ 0.216 \approx 2.487\ 10^3 kg$$

$$\Delta\omega = \pi\ rad\ s^{-1}$$

$$M = FR = I\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

$$\rightarrow \Delta\omega = \frac{FR}{I}\Delta t = \frac{FR}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5}{2}\frac{F}{mR}\Delta t$$

$$\rightarrow F = \frac{2mR\Delta\omega}{5\Delta t} = \frac{2\ 2.487\ 10^3 0.6\ 3.14}{5\ 30} \approx 62.5\ N$$