Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2010/11

Meccanica

Prova scritta – 19/9/2011

Problema 1

Per misurare la forza resistiva totale che si oppone al moto di un'auto di massa $m = 10^3$ kg (attrito di rotolamento e resistenza dell'aria, assunta proporzionale al quadrato della velocita'), essa viene fatta scendere a motore spento lungo due diversi pendii, uno con angolo $\alpha_1 = 2.87^0$ e l'altro con angolo $\alpha_2=5.74^0$. Si rileva che nel primo caso l'auto scende con velocita' costante $v_1 = 20\ ms^{-1}$, mentre nel secondo scende a velocita' costante $v_2 = 30\ ms^{-1}$.

a) Quanto vale la forza di attrito di rotolamento che si oppone al moto dell'auto quando essa ha velocita' v_1 e v_2?

b) Se la potenza massima che il motore puo' erogare e' $P_{max} = 40\ kW$, su quale pendenza massima l'auto puo' salire con velocita' costante v_1?

$$F_{att} = F_{rot} + F_{aria} = F_{rot} + av^2$$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha_1 = F_{rot} + av_1^2 \\ mg\sin\alpha_2 = F_{rot} + av_2^2 \end{cases}$$

$$\to mg\left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right) = a\left(v_1^2 - v_2^2\right)$$

$$\to a = \frac{mg\left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right)}{v_1^2 - v_2^2}$$

$$\to mg\left(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2\right) = 2F_{rot} + a\left(v_1^2 + v_2^2\right)$$

$$\to mg\left(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2\right) = 2F_{rot} + mg\left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right)\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}$$

$$\to F_{rot} = \frac{1}{2}mg\left[\left(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2\right) - \left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right)\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}\right]$$

$$\to F_{rot} = \frac{1}{2}9810\left[\left(\sin 2.87 + \sin 5.74\right) - \left(\sin 2.87 - \sin 5.74\right)\frac{20^2 + 30^2}{20^2 - 30^2}\right]$$

$$\to F_{rot} = 4905\left[\left(0.05 + 0.10\right) - \left(0.05 - 0.1\right)\frac{400 + 900}{-500}\right] \approx 4905\ \left(0.15 - 0.05\ 2.6\right) \approx 98.1N$$

$$F_1 = mg\sin\alpha_1 = 9810\ 0.05 = 491N$$

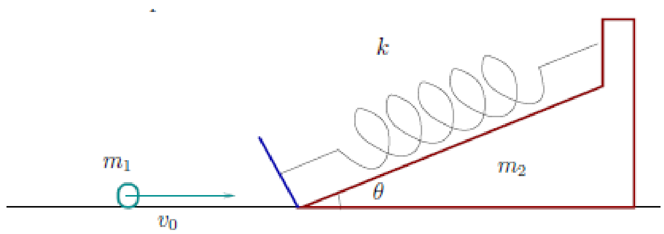
$$P_{\max} = Fv_1 = \left(mg\sin\theta_{\max} + F_1\right)v_1$$

$$\rightarrow \frac{P_{\max}}{v_1} - F_1 = mg\sin\theta_{\max} \rightarrow \sin\theta_{\max} = \frac{P_{\max}}{mgv_1} - \frac{F_1}{mg}$$

$$\rightarrow \sin\theta_{\max} = \frac{P_{\max} - F_1 v_1}{mgv_1} = \frac{40\ 10^3 - 491\ 20}{10^3\ \ 9.81\ 20} = \frac{2}{9.81} - \frac{491}{9810} \approx 0.15 \rightarrow \theta_{\max} \approx 8.63^0$$

Problema 2

Nel sistema in figura la massa m_1 è lanciata inizialmente con velocità v_0. La molla, di lunghezza a riposo uguale alla lunghezza del piano inclinato, è libera di contrarsi, e il piano inclinato è libero di spostarsi sul piano orizzontale; non ci sono attriti.
Calcolare la massima contrazione della molla se:



a) Il piano inclinato e' fisso rispetto al piano orizzontale
b) Il piano inclinato e' libero di spostarsi sul piano orizzontale e non ci sono attriti

$$a)\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + m_1 g x \sin\theta$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{2m_1 g \sin\theta}{k}x - \frac{m_1 v_0^2}{k} = 0$$

$$\rightarrow x = -\frac{m_1 g \sin\theta}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1 g \sin\theta}{k}\right)^2 + \frac{m_1 v_0^2}{k}}$$

$$\rightarrow x = -\frac{m_1 g \sin\theta}{k} \pm \frac{m_1}{k}\sqrt{g^2 \sin^2\theta + \frac{k v_0^2}{m_1}}, \text{ sol. positiva col +}$$

$b) m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos\theta + m_2 v_2$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k x^2 + m_1 g x \sin\theta$$

Posizione di massima compressione:

$x = x_{\max}, v_1 \cos\theta = v_2 = v$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x_{\max}^2 + m_1 g x_{\max} \sin\theta \\ m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = v$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 v_0^2 + \frac{1}{2} k x_{\max}^2 + m_1 g x_{\max} \sin\theta$$

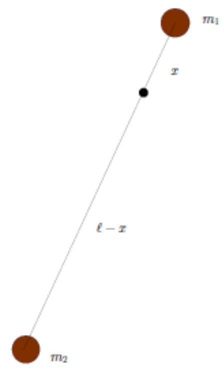
$$\rightarrow k x_{\max}^2 + 2 m_1 g x_{\max} \sin\theta + v_0^2 \left[(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 - m_1\right] = 0$$

$$\rightarrow x_{\max}^2 + \frac{2 m_1 g \sin\theta v_0^2}{k} x_{\max} - \frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)} v_0^2 = 0$$

$$\rightarrow x_{\max} = \frac{m_1 g \sin\theta}{k}\left(\sqrt{1 + \frac{k \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}}{m_1^2 g^2 \sin^2\theta} v_0^2} - 1\right)$$

Problema 3

Agli estremi di un'asta di lunghezza l e massa trascurabile sono fissate due masse m_1 e m_2. L'asta è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un perno posto su essa, a distanza x dalla massa m_1.



a) Determinare la posizione di equilibrio stabile
b) Mostrare che per piccoli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio stabile le oscillazioni del sistema sono armoniche

$$U = m_1 g x \cos\theta - m_2 g (l-x)\cos\theta$$

$$\frac{dU}{d\theta} = -m_1 g x \sin\theta + m_2 g (l-x)\sin\theta$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \rightarrow \left[-m_1 g x + m_2 g (l-x)\right]\sin\theta = 0$$

$$\rightarrow \theta_{equil} = 0, \pi \rightarrow \begin{cases} \left[-m_1 x + m_2 (l-x)\right] > 0 \rightarrow \theta_{stab} = 0 \\ \left[-m_1 x + m_2 (l-x)\right] < 0 \rightarrow \theta_{stab} = \pi \end{cases}$$

I caso: $\theta_{stab} = 0 \rightarrow \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ per θ piccoli

$$U = m_1 g x \cos\theta - m_2 g (l-x)\cos\theta \simeq \left[m_1 g x - m_2 g (l-x)\right]\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$\rightarrow U(\theta) \simeq \left[m_1 g x - m_2 g (l-x)\right]\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = A + B\theta^2$$

Cons. energia meccanica:

$$\frac{1}{2} I_1 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + A + B\theta^2 = \text{cost} \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (I_1 + I_2) + A + B\theta^2 = \text{cost}$$

Derivando rispetto a t:

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}(I_1 + I_2) + 2B\frac{d\theta}{dt}\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}(I_1 + I_2) + 2B\theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2B}{I_1 + I_2}\theta = 0 \text{ eq. moto armonico}$$