Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2015/16

Meccanica

Prova scritta – 22/03/2016

Problema 1

Un punto materiale si muove nel piano *(x,y)* con:

$$\mathbf{r}(t) = \alpha t\hat{\mathbf{i}} + \beta e^{-t}\mathbf{j}$$

Determinare:

a) l'equazione della traiettoria in coordinate cartesiane
b) i vettori velocità, accelerazione, accelerazione tangenziale e accelerazione normale
c) i vettori velocità e accelerazione per *t*->∞: identificare il tipo di moto.

$$\rightarrow \begin{cases} x(t) = \alpha t \\ y(t) = \beta e^{-t} \end{cases}$$

$$\rightarrow t = \frac{x}{\alpha} \rightarrow y = \beta e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

$$\mathbf{v}(t) = \alpha\hat{\mathbf{i}} - \beta e^{-t}\hat{\mathbf{j}} \rightarrow \hat{\mathbf{u}}_T = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\alpha\hat{\mathbf{i}} - \beta e^{-t}\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 e^{-2t}}}$$

$$\mathbf{a}(t) = \beta e^{-t}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 e^{-2t}}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{\beta^2 e^{-2t}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 e^{-2t}}} \rightarrow \mathbf{a}_T = \hat{\mathbf{u}}_T \frac{d^2 s}{dt^2} = -\beta^2 e^{-2t} \frac{\alpha\hat{\mathbf{i}} - \beta e^{-t}\hat{\mathbf{j}}}{\alpha^2 + \beta^2 e^{-2t}}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N \rightarrow \mathbf{a}_N = \mathbf{a} - \mathbf{a}_T = \beta e^{-t}\hat{\mathbf{j}} - \left(-\beta^2 e^{-2t} \frac{\alpha\hat{\mathbf{i}} - \beta e^{-t}\hat{\mathbf{j}}}{\alpha^2 + \beta^2 e^{-2t}}\right)$$

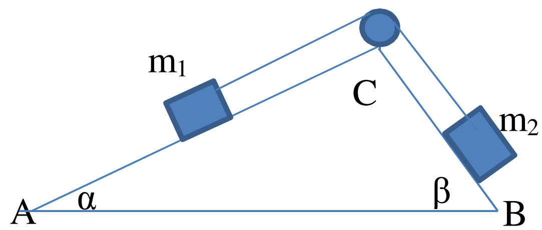
$$\rightarrow \mathbf{a}_N = \alpha\beta e^{-t} \frac{\alpha\hat{\mathbf{j}} + \beta e^{-t}\hat{\mathbf{i}}}{\alpha^2 + \beta^2 e^{-2t}}$$

Per $t \rightarrow \infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{v}(t) = \alpha\hat{\mathbf{i}} - \beta e^{-t}\hat{\mathbf{j}} \rightarrow \alpha\hat{\mathbf{i}} \\ \mathbf{a}(t) = \beta e^{-t}\hat{\mathbf{j}} \rightarrow 0 \end{array}\right\} \text{Moto rettilineo uniforme lungo } x$$

Problema 2

Due carrelli di massa m_1 e m_2 (con $m_1 = 1.5\ m_2$) sono posti su un doppio piano inclinato e sono collegati tra loro per mezzo di una fune inestensibile e di massa trascurabile che scorre in una carrucola, anch'essa di massa trascurabile, posta in cima al piano come in figura. Il tratto AC è liscio, mentre il tratto CB è scabro, gli angoli alla base sono $\alpha=30°$ e $\beta=60°$.



a) Il sistema è in quiete. Calcolare il coefficiente di attrito statico minimo μ_{s_min} tra la massa m_2 e il piano CB che consente al sistema di rimanere nello stato di quiete.
b) Il sistema viene messo in moto caricando i carrelli in modo che abbiano entrambi la stessa massa ($m_1 = m_2$). Il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu_d = \mu_{s\_min}/2$. Calcolare l'accelerazione del sistema.

$$m_1 a = T - m_1 g \sin\alpha = 0 \rightarrow T = m_1 g \sin\alpha = \frac{3}{4} m_2 g$$

$$F_p = m_2 g \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} m_2 g > T$$

$$F_a = F_p - T = m_2 g\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right)$$

$$F_a \le \mu_s m_2 g \cos\beta$$

$$\rightarrow \cancel{m_2 g}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right) \le \mu_s \cancel{m_2 g} \cos\beta \rightarrow \mu_s \ge 0.23$$

$$m_1 = m_2, m_2 \text{ scende, } \mu_d = \frac{\mu_s}{2}:$$

$$m_1 a = T - m_1 g \sin\alpha$$

$$m_2 a = m_2 g \sin\beta - T - \mu_d m_2 g \cos\beta$$

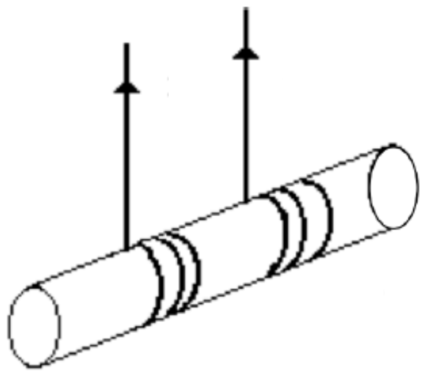
$$\rightarrow (m_1 + m_2) a = -m_1 g \sin\alpha + m_2 g \sin\beta - \mu_d m_2 g \cos\beta$$

$$\rightarrow 2ma = -\frac{mg}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} mg - \frac{\mu_d mg}{2}$$

$$\rightarrow a = \frac{g}{4}\left(-1 + \sqrt{3} - \frac{0.23}{2}\right) \approx 1.5\ ms^{-2}$$

Problema 3

Un cilindro pieno omogeneo di massa $m = 1\ kg$ e' appeso in un piano verticale, in modo da mantenere il suo asse orizzontale, mediante avvolgimento di due funi ideali fissate al soffitto; a un certo istante viene lasciato andare e comincia a scendere svolgendo le funi.



Determinare

1. L'accelerazione del suo CM durante la discesa
2. Dopo quanto tempo e' sceso di $h = 50\ cm$
3. Le tensioni delle funi

$$ma = 2T - mg$$

$$I\alpha = 2RT$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\alpha = -\frac{a}{R}$$

$$\rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{m}{2}(a+g) \\ -\dfrac{1}{2}mR^2\dfrac{a}{R} = 2RT \end{cases} \rightarrow a = -\frac{2}{3}g \approx -6.5\ ms^{-2}$$

$$h = \frac{1}{2}\frac{2}{3}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{3h}{g}} \approx 0.39s$$

$$T = \frac{m}{2}\left(-\frac{2}{3}g + g\right) = \frac{mg}{6} \approx 1.6N$$