Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2012/13

Meccanica

Prova scritta – 25/03/2013

Problema 1

Un corpo e' vincolato a muoversi all'interno di una guida circolare di raggio *R*, con coefficiente di attrito μ. Sapendo che all'istante $t=0$ la sua velocita' vale v_0, e il moto avviene in assenza di gravita', trovare:

a) La velocita' in funzione dello spazio percorso $v(s)$; disegnarne il grafico

b) Il valore del coefficiente μ se dopo *5* giri la velocita' si e' ridotta di un fattore *10*

Eq. moto tangenziale e normale:

$$\begin{cases} ma_T = -\mu N \\ m\dfrac{v^2}{R} = N \end{cases} \rightarrow m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds} = -\mu m\frac{v^2}{R}$$

a) Eq. a variabili separabili:

$$\frac{dv}{v} = -\mu\frac{ds}{R} \rightarrow v = v_0 e^{-\mu\frac{s}{R}}$$

$$\text{b)}\, v(10\pi R) = \frac{v_0}{10} \rightarrow v_0 e^{-10\mu\pi} = \frac{v_0}{10}$$

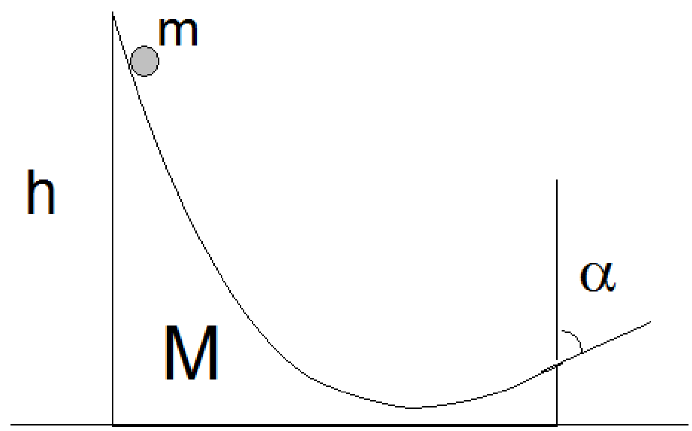
$$\rightarrow \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -10\mu\pi \rightarrow \mu = 0.073$$

Problema 2

Uno sciatore di massa m scende da una quota h lungo un trampolino di massa M, e inizia il salto, quando e' a un'altezza trascurabile, con angolo α rispetto alla verticale.

a) Trovare l'altezza massima raggiunta dallo sciatore nel salto dopo aver lasciato il trampolino, se quest'ultimo e' fissato al terreno.

b) Trovare la velocita' orizzontale del trampolino, al momento del distacco, se questo non e' fissato al terreno ma e' libero di scivolare senza attrito.



a) Conservazione en. meccanica:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \to v_0 = \sqrt{2gh}$$

$$\to \begin{cases} v_{0x} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0y} = v_0 \cos\alpha \end{cases}$$

$$\to mgh = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 + mgy_{\max} \to y_{\max} = h - \frac{v_{0x}^2}{2g} = h\cos^2\alpha$$

$$\left.\begin{cases} \mathbf{V} = \text{vel. trampolino} \\ \mathbf{v}_0 = \text{vel. sciatore} \end{cases}\right. \text{riferite al suolo}$$

$\mathbf{v}_0$' = vel. sciatore riferita al trampolino

$$\to \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0' + \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V} = -V\hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{oy}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{v}_0' = v_{0x}'\hat{\mathbf{i}} + v_{oy}'\hat{\mathbf{j}}$$

$$\to \mathbf{v}_0 = \left(v_0'\sin\alpha - V\right)\hat{\mathbf{i}} + v_0'\cos\alpha\hat{\mathbf{j}}$$

b) Cons. quantita' di moto lungo *x*:

$$0 = -MV + m\left(v_0'\sin\alpha - V\right)$$

$$\to V = \frac{mv_0'\sin\alpha}{m+M}$$

Cons. energia meccanica:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0'^2 + V^2 - 2Vv_0'\sin\alpha\right)$$

$$\to v_0' = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{1+\frac{M}{m}}}}$$

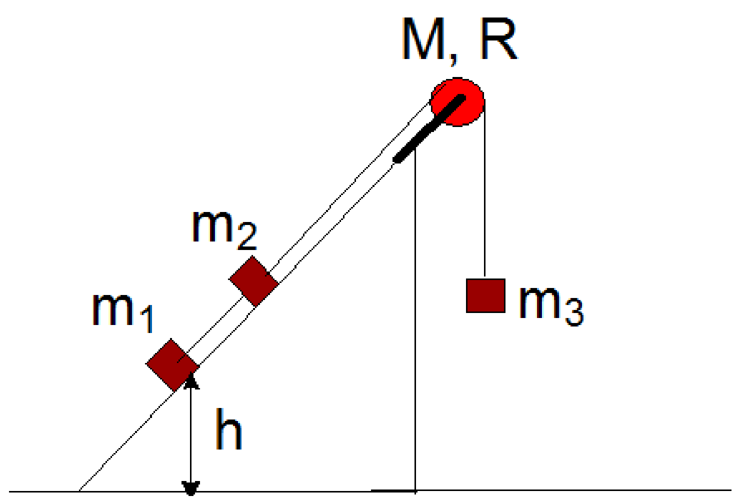
$$\to V = \frac{v_0'\sin\alpha}{1+\frac{M}{m}} = \sqrt{\frac{2gh\sin^2\alpha}{\left(\cos^2\alpha + \frac{M}{m}\right)\left(1+\frac{M}{m}\right)}}$$

Problema 3

Due masse puntiformi $m_1 = m_2 = 2m$, poste su un piano scabro, con coefficiente di attrito $\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e inclinato di un angolo $\alpha = 45^0$, sono collegate fra loro e a una terza massa $m_3 = m$ da funi prive di massa e inestensibili; la carrucola ha massa $M = 4m$ e raggio R. All'istante $t = 0$, quando m_1 si trova a una quota h rispetto al pavimento, il sistema viene lasciato libero di muoversi. Calcolare:

a) La velocita' con cui m_1 giunge sul pavimento, supponendo che la carrucola ruoti senza attrito.

b) Il momento frenante M_f, rispetto all'asse della carrucola, necessario per mantenere il sistema in moto uniforme durante la discesa.



a) Cons. energia meccanica, incluso lavoro forza di attrito:

$$\left(m_1+m_2\right)gh = m_3 g\frac{h}{\sin\alpha}+\frac{1}{2}\left(m_1+m_2+m_3\right)v^2+\frac{1}{2}I\omega^2+\mu\left(m_1+m_2\right)gh\cot\alpha$$

$$I=\frac{1}{2}MR^2=2mR^2$$

$$\rightarrow 4mgh = mgh\sqrt{2}+\frac{1}{2}5mv^2+mv^2+4mgh\mu$$

$$\rightarrow v^2=\frac{4}{7}gh\left(2-\sqrt{2}\right)\rightarrow v=\sqrt{\frac{4}{7}gh\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

b) Masse:

$$T_3=m_3 g$$

$$T_1=m_1 g\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)$$

$$T_2-T_1=m_2 g\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)$$

$$T_2-T_3=T_2-T_1+T_1-T_3$$

$$=m_2 g\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)+m_1 g\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)-m_3 g$$

$$=\left(m_1+m_2\right)g\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)-m_3 g$$

Carrucola:

$$0=R\left(T_2-T_3\right)-M_f$$

$$\rightarrow M_f=R\left(T_2-T_3\right)$$

$$\rightarrow M_f=2\left(\sqrt{2}-1\right)mgR$$