Corso di Laurea in Fisica

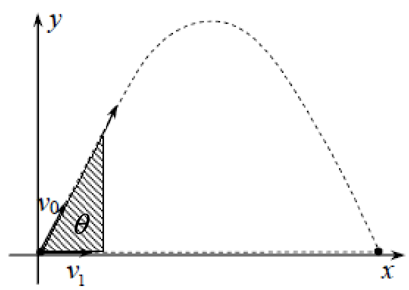
A.A. 2013/14

Meccanica

Prova scritta – 27/03/2014

Problema 1

Due proiettili puntiformi di ugual massa $m = 1\ kg$ vengono lanciati dall'origine nello stesso istante, uno lungo un piano inclinato liscio (angolo $\theta = 60^0$, lunghezza $d = 1.15\ m$) con velocita' iniziale $v_0 = 6.3\ ms^{-1}$, l'altro orizzontalmente lungo un pavimento scabro (coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$) con velocita' iniziale v_1; i due punti si muovono nello stesso piano verticale.



a) Determinare la velocita' v_1 che garantisce che i due punti si incontrino
b) Determinare l'en. cinetica un istante prima della collisione nelle condizioni trovate in a)

Primo proiettile

Moto sul piano inclinato: Cons. en. meccanica

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^{'2} + mgd\sin\theta$$

$$\rightarrow v_0^{'}(t_1) = \sqrt{v_0^2 - 2gd\sin\theta} \equiv v_0^{'}$$

$v_0^{'} = v_0 - g\sin\theta t_1 \rightarrow t_1 = \dfrac{v_0 - v_0^{'}}{g\sin\theta}$ istante di distacco dal piano inclinato

Moto parabolico:

$$x(t) = d\cos\theta + v_0^{'}\cos\theta\ t$$

$$y(t) = d\sin\theta + v_0^{'}\sin\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

$d\sin\theta + v_0^{'}\sin\theta\ t_2 - \dfrac{1}{2}gt_2^2 = 0$ istante di atterraggio sul pavimento

(contato a partire dall'istante di distacco...)

$$\rightarrow t_2 = \frac{v_0^{'}\sin\theta + \sqrt{v_0^{'2}\sin^2\theta + 2gd\sin\theta}}{g}$$

$$\rightarrow T = t_1 + t_2$$

$\rightarrow x_1(T) = d\cos\theta + v_0^{'}\cos\theta T$ distanza dall'origine del punto di atterraggio

Secondo proiettile

$F_a = \mu_d mg$ Forza di attrito

$$x_2(t) = v_1 t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2$$

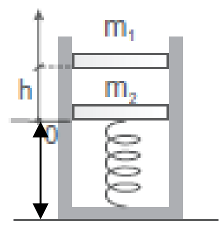
$$\rightarrow x_2(T) = v_1 T - \frac{1}{2}\mu_d g T^2$$

$$x_1(T) = x_2(T) = x_T \rightarrow v_1 = \frac{2x_T + \mu_d g T^2}{2T} = 3.5\ ms^{-1}$$

$$b) E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m(v_1 - \mu_d gT)^2 = 22.86\ J$$

Problema 2

Un corpo di massa m_1, inizialmente in quiete, viene lasciato cadere da un'altezza h su un corpo di massa m_2, fermo alla quota L sopra il pavimento e in contatto con una molla di costante elastica k, inizialmente alla sua lunghezza di riposo.



a) Assumendo che l'urto sia completamente anelastico, determinare la massima compressione della molla rispetto alla posizione iniziale di m_2.
b) Determinare il periodo delle oscillazioni del sistema dopo la collisione

$a)$

$$v=\sqrt{2gh}$$

$$m_1 v=(m_1+m_2)v' \to v'=\frac{m_1}{m_1+m_2}v$$

$$\to \frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2+(m_1+m_2)gL=\frac{1}{2}k\Delta x^2+(m_1+m_2)g(L-\Delta x)$$

$$\frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1+m_2}v^2+(m_1+m_2)gL=\frac{1}{2}k\Delta x^2+(m_1+m_2)g(L-\Delta x)$$

$$\frac{m_1^2}{m_1+m_2}v^2+2(m_1+m_2)gL=k\Delta x^2+2(m_1+m_2)g(L-\Delta x)$$

$$\Delta x^2-\frac{2(m_1+m_2)g}{k}\Delta x-\frac{2m_1^2 gh}{k(m_1+m_2)}=0$$

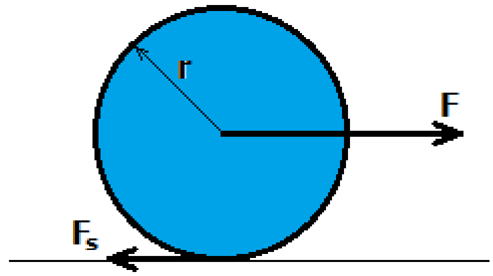
$$\to \Delta x=\frac{(m_1+m_2)g}{k}\pm\sqrt{\left[\frac{(m_1+m_2)g}{k}\right]^2+\frac{2m_1^2 gh}{k(m_1+m_2)}} \to \text{segno } +$$

$b)$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \to T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$$

Problema 3

Un cilindro omogeneo di massa $m = 6.3\ kg$ e raggio $r = 64\ cm$ rotola su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza F orizzontale applicata nel centro di massa, di modulo $F = 12\ N$; il coefficiente di attrito statico fra cilindro e piano e' $\mu_s=0.55$.



Sapendo che il cilindro parte da fermo determinare

a) L'energia cinetica all'istante $t = 4.2\ s$
b) Il lavoro fatto dalle forze agenti sul cilindro fino all'istante t
c) Il valore massimo di F che garantisce che il cilindro rotoli senza strisciare

$a)$

$$a_{CM} = \alpha r$$

$$F - F_s = ma_{CM}$$

$$M = I\alpha \rightarrow F_s r = \frac{1}{2}mr^2\alpha = \frac{1}{2}mr^2\frac{a_{CM}}{r} = \frac{1}{2}mra_{CM}$$

$$\rightarrow a_{CM} = \frac{2F_s}{m}$$

$$\rightarrow F - F_s = ma_{CM} = 2F_s \rightarrow \frac{F}{3} = F_s$$

$$\rightarrow a_{CM} = \frac{2F}{3m} \rightarrow v_{CM} = a_{CM}t = \frac{2F}{3m}t$$

$$\rightarrow v_{CM}\left(t = 4.2s\right) = \frac{2\ 12}{3\ 6.3}4.2 \sim 5.3\ ms^{-1}$$

$$v_{CM} = \omega r$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{4}mv_{CM}^2 = \frac{3}{4}mv_{CM}^2$$

$$\rightarrow E_k\left(t = 4.2s\right) \sim 1.3\ 10^2\ J$$

$b)$

$W = Fx$ solo F perche' F_s non causa spostamento

$$x_{CM} = \frac{1}{2}a_{CM}t^2 \rightarrow W = F\frac{1}{2}a_{CM}t^2 \sim 1.3\ 10^2\ J$$

$c)$

$$F = 3F_s \rightarrow F \le 3\mu_s mg \sim 1\ 10^2\ N$$