Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2010/11

Meccanica

Prova scritta – 31/3/2011

Problema 1

Un giocatore di rugby deve battere un calcio di punizione da una distanza di *50 m* dalla porta, imprimendo alla palla una velocita' iniziale di *25 ms*$^{-1}$.
Calcolare:

a) L'intervallo dell'angolo di alzo (ossia l'angolo che la velocita' iniziale forma con il terreno) entro cui deve calciare per inviare la palla sopra la traversa, che e' posta ad un'altezza di *3.4 m*
b) A quale altezza la palla passera' sopra la traversa se viene calciata con angolo di alzo di 45^0

Si trascuri la resistenza dell'aria

$$x(t) = v_{0x}t$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\rightarrow \bar{t} = \frac{d}{v_{0x}}$$

$$\rightarrow y(\bar{t}) = v_{0y}\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}d - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_{0x}}\right)^2$$

$$y(\bar{t}) \geq h$$

$$\rightarrow \frac{v_{0y}}{v_{0x}}d - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_{0x}}\right)^2 \geq h$$

$$\begin{cases} v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0x} = v_0 \cos\alpha \end{cases} \rightarrow \tan\alpha d - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 \geq h$$

$$\rightarrow \tan\alpha d - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0}\right)^2 \frac{1}{\cos^2\alpha} \geq h$$

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \to 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \tan^2\alpha \to \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$$

$$\to d\tan\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0}\right)^2\left(1+\tan^2\alpha\right) - h \geq 0$$

$$\to \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0}\right)^2\tan^2\alpha - d\tan\alpha + h + \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0}\right)^2 \leq 0$$

$$\to \tan^2\alpha - \frac{2}{g}d\left(\frac{v_0}{d}\right)^2\tan\alpha + \frac{2}{g}\left(\frac{v_0}{d}\right)^2\left(h+\frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0}\right)^2\right) \leq 0$$

$$u = \tan\alpha$$

$$u^2 - \frac{2}{g}d\left(\frac{v_0}{d}\right)^2 u + \frac{2}{g}h\left(\frac{v_0}{d}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\to u = \frac{d}{g}\left(\frac{v_0}{d}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{d^2}{g^2}\left(\frac{v_0}{d}\right)^4 - \frac{2}{g}h\left(\frac{v_0}{d}\right)^2 - 1}$$

$$u \sim \frac{50}{9.81}\left(\frac{25}{50}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{50}{9.81}\right)^2\left(\frac{25}{50}\right)^4 - \frac{6.8}{9.81}\left(\frac{25}{50}\right)^2 - 1}$$

$$u \sim 1.27 \pm \sqrt{1.62-0.173-1}$$

$$u \sim 1.27 \pm \sqrt{1.62-1.17} \sim 1.27 \pm 0.668$$

$$\alpha \in \left(\arctan 1.94, \arctan 0.602\right) \to 62.7^0 > \alpha > 31.0^0$$

$$y\left(\bar{t}\right) = v_{0y}\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^{\,2} = d\tan\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0\cos\alpha}\right)^2$$

$$y\left(\bar{t}\right) \sim 50 - \frac{9.81}{2}\left(\frac{50}{25\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 m \sim 50 - 4.9\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 m \sim 50 - 4.9\cdot 8\ m = 10.8\ m$$

Problema 2

Un pendolo semplice, in una localita' a livello del mare e sull'equatore, ha un periodo di *2 s*.
Calcolare:

a) Il periodo dello stesso pendolo se trasportato al Polo Nord
b) Il periodo dello stesso pendolo sulla Luna

M_{Terra}=$6\ 10^{24}$ *kg*, M_{Luna}= $\frac{1}{81.25} M_{Terra}$

R_{Terra}=$6.38 10^{6}$*m*, R_{Luna}= $\frac{1}{3.66} R_{Terra}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \quad \text{Polo Nord}$$

$$g = g_e = g_0 - \omega_0^2 R_T \quad \text{Equatore}$$

$$\rightarrow g_e = g_0\left(1 - \frac{\omega_0^2 R_T}{g_0}\right) = g_0\left(1 - \frac{\omega_0^2 R_T^3}{GM_T}\right)$$

$$\rightarrow g_0 = \frac{g_e}{1 - \frac{\omega_0^2 R_T^3}{GM_T}} \simeq g_e\left(1 + \frac{\omega_0^2 R_T^3}{GM_T}\right)$$

$$\rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}\frac{g_e}{g_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}}\sqrt{\frac{g_e}{g_0}}$$

$$\rightarrow T_0 = T_e\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2 R_T^3}{GM_T}}} \simeq T_e\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2 R_T^3}{GM_T}} \simeq T_e\left(1 - \frac{\omega_0^2 R_T^3}{2GM_T}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_{giorno}} \simeq \frac{2\pi}{8.64 10^4} rads^{-1} \simeq 7.27 10^{-5} rads^{-1}$$

$$\rightarrow T_0 \simeq 2\left(1 - \frac{\left(7.27 10^{-5}\right)^2 \left(6.38 10^6\right)^3}{2 \cdot 6.67 10^{-11} 6 10^{24}}\right)s$$

$$\rightarrow T_0 \simeq 2\left(1 - \frac{1.37 10^4 10^8}{80 10^{13}}\right)s \simeq 2\left(1 - \frac{1.37}{800}\right)s \approx 1.997 s$$

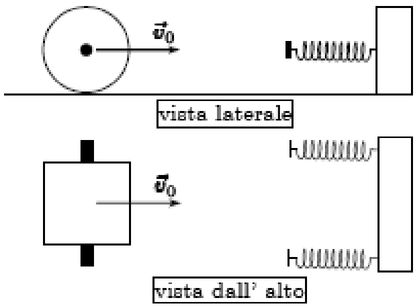
$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2}$$ Luna

$$\rightarrow g_L \simeq g_0 \frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 \simeq 9.81\frac{3.66^2}{81.2} ms^{-2} \approx 1.62\ ms^{-2}$$

$$\rightarrow T_L = T_0\sqrt{\frac{g_0}{g_L}} \simeq 1.997\sqrt{\frac{9.81}{1.62}}\ s \approx 4.91\ s$$

Problema 3

Un cilindro di raggio *20 cm* e massa *10 kg* rotola senza strisciare su un piano orizzontale, in modo che il suo centro di massa ha velocita' costante $5\ ms^{-1}$. In fondo al piano il cilindro viene arrestato da una coppia di molle di costante elastica $1.87\ 10^{4}\ Nm^{-1}$, fissate al piano all'altezza del suo asse, come in figura



Calcolare:

a) La massima compressione delle molle
b) La velocita' dell'asse del cilindro in funzione della posizione durante l'arresto

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = 2\frac{1}{2}kx^2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$v_0 = \omega_0 R$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{v_0^2}{R^2} = kx^2$$

$$\rightarrow \frac{3}{4}Mv_0^2 = kx^2$$

$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{3M}{4k}}v_0 \sim \sqrt{\frac{3\cdot 10}{4\cdot 1.8710^4}}5\ m \sim 0.02\cdot 5\ m = 0.1\ \ m$$

$$Mv^2 = Mv_0^2 - \frac{4}{3}kx^2$$

$$\rightarrow v(x) = \sqrt{v_0^2 - \frac{4k}{3M}x^2}$$