Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2014/15

Meccanica

Prova scritta – 31/08/2015

Problema 1

Due punti materiali si muovono di moto rettilineo per un tempo $t = 1\ s$ partendo dalla stessa posizione e con velocità iniziale $v_0 = 5\ m/s$. Il primo ha accelerazione $a = \gamma t$ e il secondo accelerazione $a = kv$.

1. Esprimere le unità di misura di γ e k nel SI
2. Ricavare le espressioni delle velocità in funzione del tempo
3. Se i valori numerici di γ e k in unità SI sono rispettivamente 6 e 4, quali sono le distanze percorse dai due corpi?

$[\gamma] = [A][T^{-1}] = [L][T^{-2}][T^{-1}] = [L][T^{-3}] \rightarrow$ Un. di misura: ms^{-3}

$[k] = [A][V^{-1}] = [L][T^{-2}][L^{-1}][T] = [T^{-1}] \rightarrow$ Un. di misura: s^{-1}

$$v = v_0 + \int_0^t a dt' = v_0 + \int_0^t \gamma t' dt' = v_0 + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

$$\frac{dv}{dt} = kv \rightarrow \frac{dv}{v} = kdt \rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'} = \int_0^t k dt' \rightarrow \ln\frac{v}{v_0} = kt \rightarrow v = v_0 e^{kt}$$

$$s = \int_0^t v dt' = \int_0^t \left(v_0 + \frac{1}{2}\gamma t'^2 \right) dt' = v_0 t + \frac{1}{6}\gamma t^3 = 5 + \frac{1}{6} 6 = 6\ m$$

$$s = \int_0^t v dt' = \int_0^t v_0 e^{kt'} dt' = \frac{v_0}{k} e^{kt'} \Big|_0^t = \frac{v_0}{k}\left(e^{kt} - 1\right) = \frac{5}{4}\left(e^4 - 1\right) \simeq 67\ m$$

Problema 2

Una sfera di massa *m = 1 kg*, legata a una fune inestensibile e di massa trascurabile di lunghezza *l = 1 m*, fissata all'altro estremo, viene lasciata andare dalla posizione orizzontale. Quando la fune e' verticale la sfera collide con un blocco di massa *M = 5 kg*. Calcolare l'ampiezza dell'oscillazione risultante della sfera

1. Se la collisione e' elastica
2. Se la collisione e' completamente anelastica

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v^2 = 2gl \quad \text{cons. en. meccanica caduta}$$

$$mgh' = \frac{1}{2}mv'^2 = mgl\left(1-\cos\theta_{el}\right) \quad \text{cons. en. meccanica risalita fino all'altezza } h' \text{(caso elastico)}$$

$$mv = MV + mv' \rightarrow V = \left(v - v'\right)\frac{m}{M} \quad \text{cons. quant. di moto}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \rightarrow mv^2 = MV^2 + mv'^2 \quad \text{cons. en. cinetica}$$

$$\rightarrow mv^2 = M\left(v-v'\right)^2\left(\frac{m}{M}\right)^2 + mv'^2$$

$$\rightarrow mv^2 = \left(\frac{m^2}{M} + m\right)v'^2 + \frac{m^2}{M}v^2 - 2\frac{m^2}{M}vv'$$

$$\rightarrow v^2 = \left(\frac{m}{M} + 1\right)v'^2 + \frac{m}{M}v^2 - 2\frac{m}{M}vv'$$

$$\rightarrow v'^2\left(1+\frac{m}{M}\right) - 2\frac{m}{M}vv' - v^2\left(1-\frac{m}{M}\right) = 0$$

$$\rightarrow v' = \frac{\frac{m}{M}v \pm \sqrt{\left(\frac{m}{M}v\right)^2 + \left(1+\frac{m}{M}\right)\left(1-\frac{m}{M}\right)v^2}}{1+\frac{m}{M}} = v\frac{\frac{m}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(1+\frac{m}{M}\right)\left(1-\frac{m}{M}\right)}}{1+\frac{m}{M}}$$

$$\rightarrow v' = v\frac{\frac{m}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(1-\left(\frac{m}{M}\right)^2\right)}}{1+\frac{m}{M}} = v\frac{\frac{m}{M} \pm 1}{1+\frac{m}{M}} = \begin{cases} \cancel{v} \quad \text{banale} \\ v\dfrac{\frac{m}{M}-1}{1+\frac{m}{M}} = v\dfrac{m-M}{m+M} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 = mgh' = mgl\left(1-\cos\theta_{el}\right) \quad \text{cons. en. meccanica}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}v^2\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 = gl\left(1-\cos\theta_{el}\right) \rightarrow \cos\theta_{el} = 1-\frac{v^2}{2gl}\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 = 1-\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 \simeq 0.56$$

$$mv = \left(M+m\right)v' \rightarrow v' = v\frac{m}{m+M} \quad \text{cons. quant. di moto (caso anelastico)}$$

$$\frac{1}{2}\left(m+M\right)v'^2 = \frac{1}{2}\left(m+M\right)v^2\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2\frac{m}{m+M} \quad \text{en. cinetica dopo urto}$$

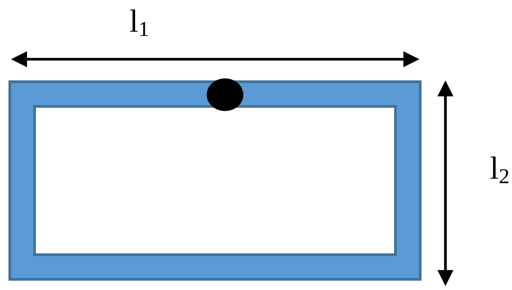
$$\frac{1}{2}mv^2\frac{m}{m+M} = \left(m+M\right)gh' = \left(m+M\right)gl\left(1-\cos\theta_{an}\right) \quad \text{cons. en. meccanica}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}m2gl\frac{m}{m+M} = \left(m+M\right)gl\left(1-\cos\theta_{an}\right) \rightarrow \cos\theta_{an} = 1-\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \simeq 0.97$$

Problema 3

Una cornice rettangolare è composta da *4* sbarrette rettilinee di lunghezza l_1, l_2 con $l_1=2\, l_2$ e massa m_1,m_2 con $m_1 = 2m_2$. La cornice è appesa a un muro tramite un chiodo posto nel punto medio di un lato lungo

1. Calcolare il momento di inerzia della cornice rispetto a un asse perpendicolare al muro passante per il punto di sospensione in funzione di m_2 *e* l_2
2. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio stabile se $l_2=30cm$



$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I_1 = \frac{m_1 l_1^2}{12}$$

$$I_3 = \frac{m_1 l_1^2}{12} + m_1 l_2^2 = \frac{m_1 l_1^2}{12} + m_1 l_2^2 = \frac{m_1 l_1^2}{12} + \frac{m_1 l_1^2}{4} = \frac{m_1 l_1^2}{3} \quad \text{teo. assi paralleli}$$

$$I_2 = I_4 = \frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2 d^2 = \frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2 \left(\frac{l_1^2}{4} + \frac{l_2^2}{4} \right) = \frac{m_1 l_1^2}{96} + \frac{m_1}{8} \left(l_1^2 + \frac{l_1^2}{4} \right) = \frac{16 m_1 l_1^2}{96}$$

$$\rightarrow I = \frac{m_1 l_1^2}{12} + \frac{4 m_1 l_1^2}{12} + \frac{32 m_1 l_1^2}{96} = \frac{36 m_1 l_1^2}{48} = \frac{36}{48} 2 m_2 4 l_2^2 = 6 m_2 l_2^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{6 m_2 l_2^2}{6 m_2 g \frac{l_2}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 l_2}{g}} \simeq 1.55 \ s$$