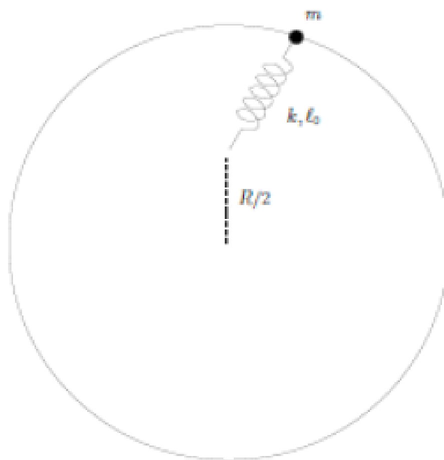
Problema 1

La particella di massa m è vincolata alla guida circolare di raggio R posta in un piano orizzontale. Inoltre è fissata ad una molla di costante k e lunghezza a riposo ℓ_0. L'altro estremo della molla è fissato a un punto posto a una distanza $R/2$ dal centro della guida.



1. Se $\ell_0 = 0$ determinare la minima velocità che deve avere la particella nel punto di minimo allungamento della molla per poter percorrere completamente la guida.

2. In funzione di $\ell_0 > 0$ discutere le posizioni di equilibrio del sistema.

Problema 2

Un disco di raggio r ruota in un piano orizzontale con velocità angolare costante ω. sul disco è praticata un scanalatura diametrale, in cui può scorrere senza attrito una pallina di massa m, legata al centro mediante una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Supponendo che sia $k > m\omega^2$ si determini il moto della pallina.

Problema 1

Velocita' minima: quella che garantisce l'arrivo nel punto di massima distanza dall'estremo fisso della molla con vel. = 0.

Cons. energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{3R}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow mv_0^2 + k\frac{R^2}{4} = k\frac{9}{4}R^2$$

$$\rightarrow mv_0^2 = 2kR^2$$

$$\rightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2k}{m}}R$$

Punti di equilibrio: Punti di estremo dell'energia potenziale

$$U = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2$$

Usando come coordinata l'angolo polare rispetto ad un asse verticale:

$$l = \sqrt{\left(R\sin\theta\right)^2 + \left[R\cos\theta - \frac{R}{2}\right]^2}$$

$$\rightarrow l = \sqrt{R^2\sin^2\theta + \frac{R^2}{4} + R^2\cos^2\theta - R^2\cos\theta}$$

$$\rightarrow l = \sqrt{\frac{5}{4}R^2 - R^2\cos\theta} = R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}$$

$$\rightarrow U\left(\theta\right) = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta} - l_0\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{dU}{d\theta} = k\left(R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta} - l_0\right)R\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right)^{-1/2}\sin\theta$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \rightarrow \begin{cases} \theta = 0,\ \theta = \pi \quad \text{qualunque } l_0 \\ R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta} = l_0 \ \text{da discutere} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta} = \frac{l_0}{R} \rightarrow \frac{5}{4} - \cos\theta = \left(\frac{l_0}{R}\right)^2$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{5}{4} - \left(\frac{l_0}{R}\right)^2$$

$l_0 < \frac{R}{2} \rightarrow \left(\frac{l_0}{R}\right)^2 < \frac{1}{4} \rightarrow \cos\theta > 1$ nessuna soluzione (molla sempre estesa)

$\frac{R}{2} < l_0 < \frac{3R}{2} \rightarrow -1 < \cos\theta < 1$ 1 soluzione (= molla in pos. riposo)

$l_0 > \frac{3R}{2} \rightarrow \cos\theta < -1$ nessuna soluzione (molla sempre compressa)

Problema 2

Nel SR in rotazione:

$\boldsymbol{F}_{tot} = \boldsymbol{F}_{molla} + \boldsymbol{F}_{fittizia}$

$\boldsymbol{F}_{fittizia} = \boldsymbol{F}_{centrifuga} + \boldsymbol{F}_{Coriolis}$

$\boldsymbol{F}_{Coriolis} \perp \boldsymbol{v}$: m vincolata a segmento rettilineo

$\rightarrow \boldsymbol{F}_{Coriolis}$ irrilevante per moto

$\rightarrow \boldsymbol{F}_{tot} = \boldsymbol{F}_{molla} + \boldsymbol{F}_{centrifuga}$

$\boldsymbol{F}_{tot} \parallel \boldsymbol{v} \rightarrow$ moto unidimensionale

$\rightarrow F_{tot} = F_{molla} + F_{centrifuga}$

$F_{molla} = -kr$

$F_{centrifuga} = m\omega^2 r$

$\rightarrow F_{tot} = -kr + m\omega^2 r = -\left(k - m\omega^2\right) r$

$$\rightarrow m\frac{d^2 r}{dt^2} = -\left(k - m\omega^2\right) r$$

$$\rightarrow m\frac{d^2 r}{dt^2} + \left(k - m\omega^2\right) r = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)}_{\omega_0^2} r = 0,$$ Eq. dei moti armonici

$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)}$, OK se $k > m\omega^2$

$\rightarrow r(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$, A, B fissati da condizioni iniziali

Moto armonico con frequenza alterata dalla rotazione del SR

$k = m\omega^2 \rightarrow \omega_0 = 0$

Frequenza propria dell' oscillatore = Frequenza di rotazione:

m appare ferma nel SR in rotazione