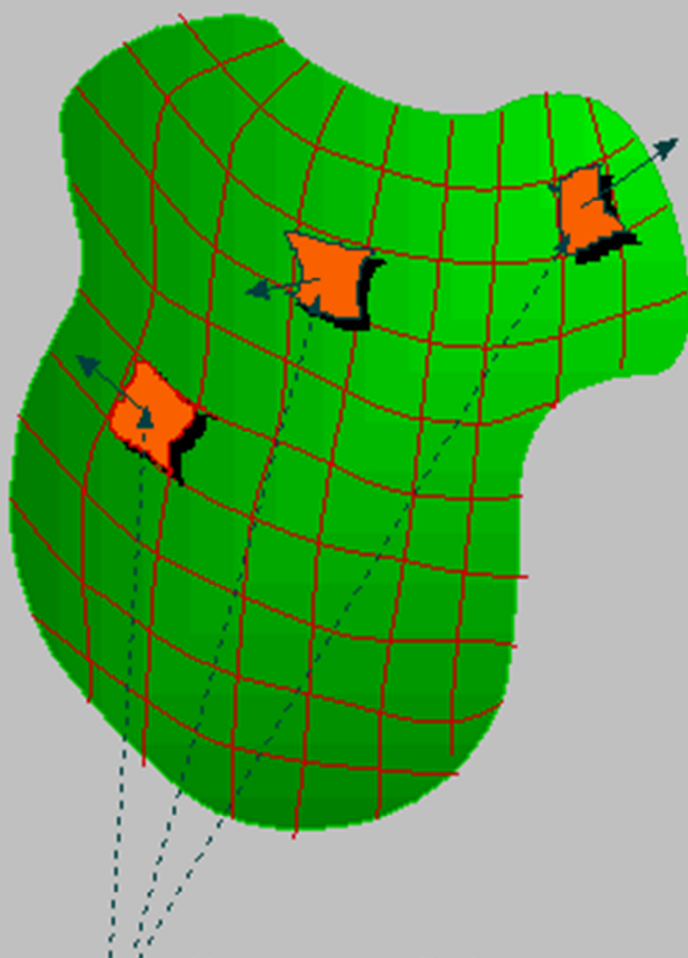
Area orientata



Normale alla superficie, punto per punto

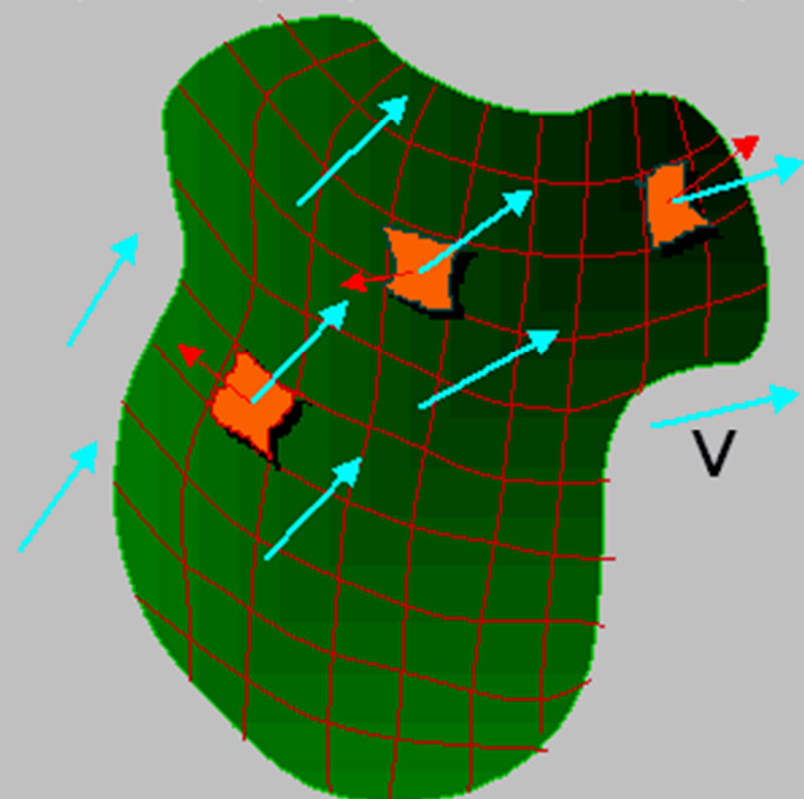
$\hat{\mathbf{n}}$: versore normale

dS: elemento di area

$\rightarrow$ elemento di area orientata: $d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} dS$

Flusso di un campo vettoriale

Campo vettoriale definito in ogni punto dello spazio (e quindi della superficie)

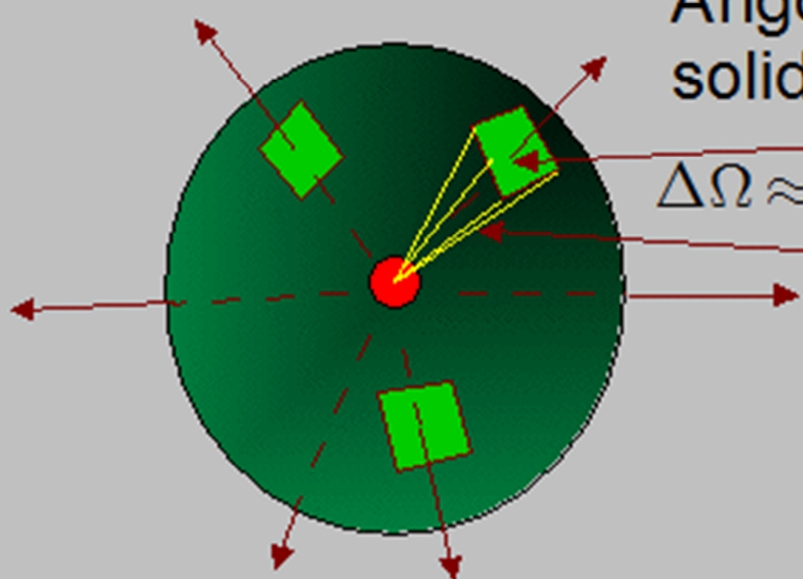


Localmente sulla superficie:
prodotto scalare **V**.d**A**
Poi: somma dei prodotti

$$\Phi_S(\mathbf{V}) \approx \sum_{\substack{\text{elementi di} \\ \text{superficie}}} \mathbf{V}_i \cdot d\mathbf{A}_i \rightarrow \Phi_S(\mathbf{V}) = \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$

Flusso del campo gravitazionale

Massa puntiforme
Superficie sferica, raggio r



Angolo solido:

$$\Delta\Omega \approx \frac{\Delta A}{r^2}$$

$$\Phi \approx \sum_{segmenti} \mathbf{g}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i$$

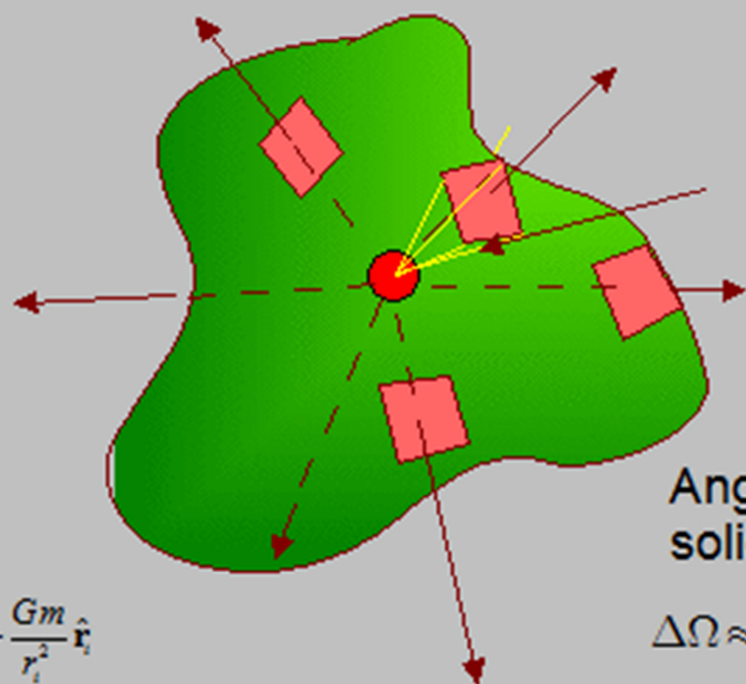
$$\mathbf{g}_i = -\frac{Gm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$

$$\Delta\mathbf{A}_i \approx r^2 \Delta\Omega_i \hat{\mathbf{r}}_i$$

$$\rightarrow \Phi \approx \sum_{segmenti} -\frac{Gm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_i \cdot r^2 \Delta\Omega_i \hat{\mathbf{r}}_i = -4\pi Gm$$

Flusso del campo gravitazionale

Massa puntiforme
Superficie qualsiasi



Angolo solido:

$$\Delta\Omega \approx \frac{\Delta A_\perp}{r^2}$$

$$\mathbf{g}_i = -\frac{Gm}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$

$$\Delta\mathbf{A}_i = \Delta S_i \hat{\mathbf{n}}_i$$

$$\to \Delta\Phi_i = \mathbf{g}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i = -\frac{Gm}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \Delta S_i \hat{\mathbf{n}}_i$$

$$\Delta\Omega_i = \frac{\Delta\mathbf{A}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2} = \frac{\Delta S_i \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2} \to \Delta S_i \hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i = \Delta\Omega_i r_i^2$$

$$\to \mathbf{g}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i = -\frac{Gm}{r_i^2}\Delta\Omega_i r_i^2 = -Gm\Delta\Omega_i$$

$$\to \Phi = \sum_i \Delta\Phi_i = -4\pi Gm$$

Se diverse masse puntiformi contenute nella superficie:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i -4\pi G m_i = -4\pi G \sum_i m_i = -4\pi G M$$

Se massa puntiforme esterna a superficie chiusa:
$\Phi=0$ flusso entrante = flusso uscente

Forma integrale del teorema di Gauss:

$$\rightarrow \oiint_{\text{Sup. chiusa}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G m, \ m \text{ massa totale contenuta}$$