Forza conservativa: il suo integrale di linea fra due posizioni fissate e' indipendente dal percorso

Es: Forza costante

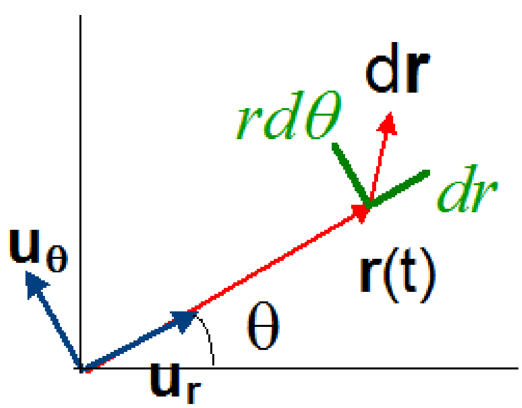
$$\boldsymbol{F} = F_x\hat{\boldsymbol{i}} + F_y\hat{\boldsymbol{j}} = \text{cost}$$

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy\right) = F_x \int_{x_A}^{x_B} dx + F_y \int_{y_A}^{y_B} dx$$

$$\rightarrow \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = F_x\left(x_B - x_A\right) + F_y\left(y_B - y_A\right)$$

Es: Forza radiale (← Centrale)

Per semplicita', caso piano: estensione 3D ovvia
Usiamo componenti e versori polari (ovvio..)



$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = a(r)\hat{\boldsymbol{u}}_r$$

$$\int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B a(r)\hat{\boldsymbol{u}}_r \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$d\boldsymbol{r} = dr\hat{\boldsymbol{u}}_r + rd\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$$

$$\rightarrow \int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B a(r)\hat{\boldsymbol{u}}_r \cdot \left(dr\hat{\boldsymbol{u}}_r + rd\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\right)$$

$$\rightarrow \int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B a(r)\hat{\boldsymbol{u}}_r \cdot dr\hat{\boldsymbol{u}}_r = \int_{r(A)}^{r(B)} a(r)\,dr$$

$\rightarrow \int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = A(r_B) - A(r_A),\ A(r)$ primitiva di $a(r)$

Es: Forza tangenziale

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{r}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$$

$$\rightarrow \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \frac{k}{r}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \frac{k}{r}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta \cdot \left(dr\hat{\boldsymbol{u}}_r + rd\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\right)$$

$$\rightarrow \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \frac{k}{r}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta \cdot rd\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{k}{r} rd\theta = \Delta\theta$$

Per $\Delta\theta = 2\pi n, \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = 2\pi nk \neq 0$

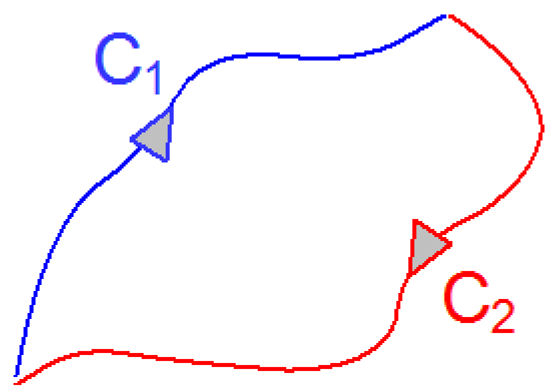
Forza conservativa: il suo integrale di linea su un percorso chiuso e' nullo

$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ Circuitazione di $\boldsymbol{F}$ lungo C

C curva chiusa

Infatti:

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} - \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$



Contributi lungo C_1 e lungo C_2: uguali in modulo (forza conservativa), opposti in segno (tratti percorsi in verso opposto)

Forza conservativa:

Il lavoro che esegue quando il punto si sposta fra due posizioni si puo' sempre scrivere come variazione di una grandezza chiamata en. potenziale:

grandezza scalare funzione della posizione nello spazio

Punto importante:

Non c'e' un'unica espressione matematica per l'energia potenziale: dipende dal tipo di forza
(v. gravita', elastica, ..)

C'e' un'unica espressione per l'energia cinetica:
$E_k = ½ mv^2$

Relazione fra forza ed energia potenziale: gradiente

Relazione fra integrale di linea ed en.potenziale:

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(A) - U(B) = -[U(A) - U(B)]$$

$U(\boldsymbol{r})$: 'primitiva' della funzione vettoriale $\boldsymbol{F}$

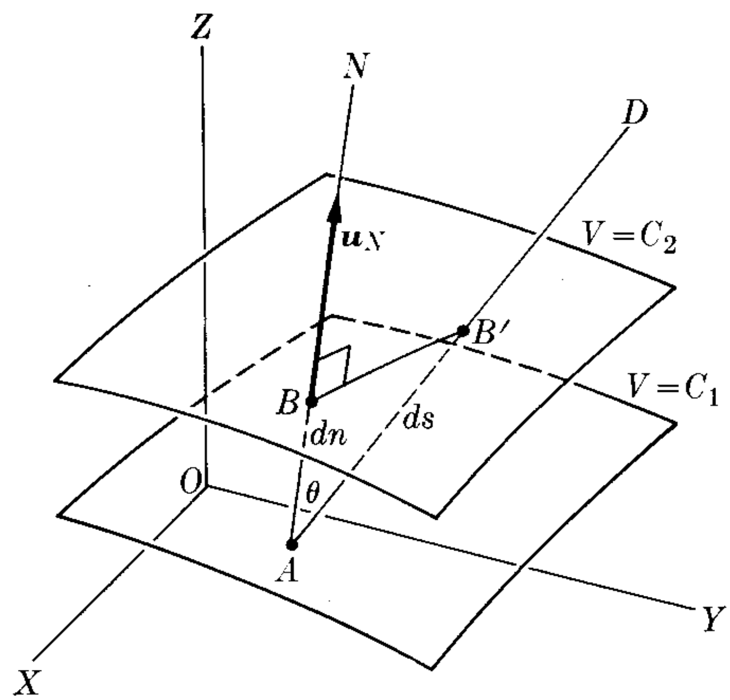
$\rightarrow F$: 'derivata' della funzione scalare $U(\boldsymbol{r})$

Ma: in che senso?

$$\boldsymbol{F} = -grad(U)$$

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}} \right)$$

Significato geometrico:



Esempio

$$U\left(x,y,z\right)=\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=kx,\frac{\partial U}{\partial y}=ky,\frac{\partial U}{\partial z}=kz$$

$$\rightarrow -gradU=-kx\hat{\boldsymbol{i}}-ky\hat{\boldsymbol{j}}-k\hat{\boldsymbol{z}}=-k\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}$$

Forza elastica in 3D

Sistema con sole forze conservative:

$W = \Delta E_k$ Teo. forze vive (= lavoro & en. cinetica)

$W = -\Delta U$ Forze conservative

$\rightarrow \Delta E_k = -\Delta U$

$\rightarrow \Delta\left(E_k + U\right) = 0$

$\rightarrow E_k + U = \text{cost}$

Legge di conservazione dell'energia *meccanica*

Conseguenza della legge fondamentale della dinamica → *non* legge indipendente

Utilissima nelle applicazioni
Profonde implicazioni *oltre* la meccanica

Osservazione

Per un punto materiale soggetto ad una forza totale $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \rightarrow \boldsymbol{F} = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{p} = \text{cost}$$

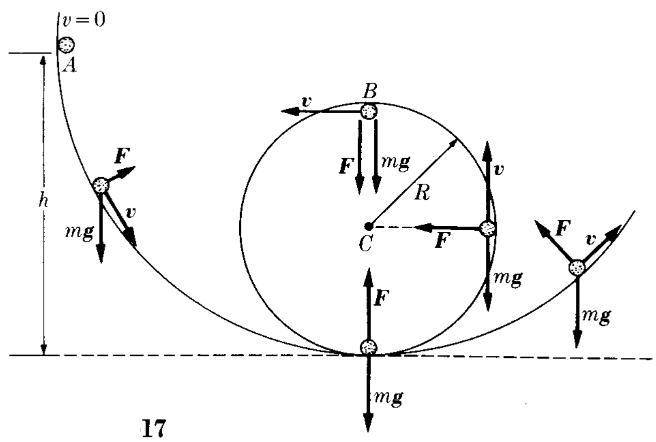
Legge di conservazione della quantita' di moto

$\boldsymbol{F}$ conservativa $\rightarrow E_{mecc} = \text{cost}$

Legge di conservazione dell'energia meccanica

Esempio

Determinare l'altezza minima (in assenza di attriti) che garantisce che la palla resta in contatto con la rotaia



Basta riferirsi al punto piu' in alto:

$$N + mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$N = 0 \rightarrow v = v_{\min}$$

$$\rightarrow m\frac{v_{\min}^2}{R} = mg \rightarrow v_{\min} = \sqrt{gR}$$

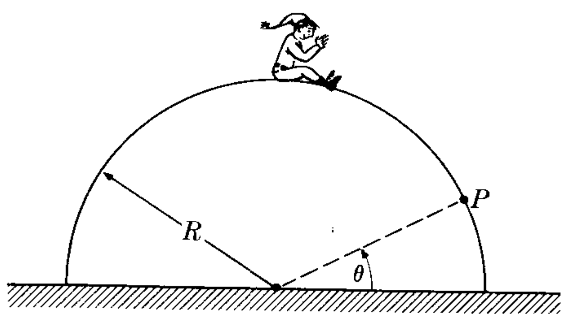
$$\rightarrow E = 2mgR + \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = 2mgR + \frac{1}{2}mgR$$

$$\rightarrow E_{\min} = \frac{5}{2}mgR$$

$$\rightarrow h_{\min} = \frac{5}{2}R$$

Esempio

Determinare, in assenza di attriti, a quale altezza il bambino si stacca dall'igloo



Quando il bambino si stacca la forza normale si annulla: $N = 0$

Ora, nella direzione radiale:

$$-N + mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$$

$$\rightarrow N = -m\frac{v^2}{R} + mg\sin\theta$$

$$N = 0 \rightarrow m\frac{v^2}{R} = mg\sin\theta$$

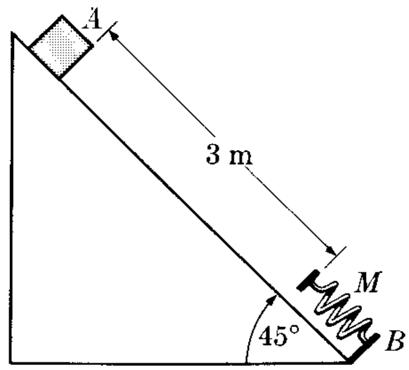
Cons. energia meccanica:

$$mgR = mgR\sin\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgR\sin\theta + \frac{1}{2}mv^2 = mgR\sin\theta + \frac{1}{2}mgR\sin\theta = \frac{3}{2}mgR\sin\theta$$

$$\rightarrow mgR = \frac{3}{2}mgR\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta \approx .730 \approx 41.8^0$$

Esempio: Determinare la compressione max della molla (trascurando l'effetto gravitazionale della variazione della sua lunghezza a riposo), e il periodo complessivo dell'oscillatore



$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\rightarrow x_{\max} = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu \rightarrow T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$t_{caduta} = t_{salita} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}}$$

$$\rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Esempio: Pendolo semplice con la conservazione dell’energia meccanica

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgl\left(1-\cos\theta\right) + \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mgl\left(1-\cos\theta_0\right)$$

$$\rightarrow g\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) = -\frac{1}{2}l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}} = dt$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}dt$$

$$\rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}t$$

Integrale ellittico del I tipo:

Funzione non elementare: andamento oscillatorio, con periodo dipendente dall’ampiezza max

Ritroviamo l'approssimazione di angoli piccoli:

$$\theta_0 \ll 1 \rightarrow \cos\theta \simeq 1-\frac{\theta^2}{2}, \cos\theta_0 \simeq 1-\frac{\theta_0^2}{2}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta-\cos\theta_0)}} \simeq \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{2}-\left(1-\frac{\theta_0^2}{2}\right)\right)}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{\theta_0^2}{2}-\frac{\theta^2}{2}\right)}}$$

$$\rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{2}{\theta_0^2-\theta^2}}\, d\theta \simeq \sqrt{\frac{2g}{l}}t \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}}\, d\theta \simeq \sqrt{\frac{g}{l}}t$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}}\, d\theta = \int_{1}^{\theta/\theta_0} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2}}\, d\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}}\, d\theta = \arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) - \arcsin(1) = \arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) - \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{g}{l}}t$$

$$\sin\left[\arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)-\frac{\pi}{2}\right] = \sin\left[\arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)\right]\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\cos\left[\arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)\right]$$

$$\sin\left[\arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)-\frac{\pi}{2}\right] = -\cos\left[\arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)\right] = -\sqrt{1-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2}$$

$$-\sqrt{1-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2} = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$\rightarrow 1-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = \sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \rightarrow \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$\rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$ Moto armonico

Lavoro compiuto dalle forze non conservative: dissipazione dell'energia

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_{nc}$$
$$\rightarrow dW = dW_c + dW_{nc}$$
$$dW_c = -dU$$
$$\rightarrow dW = -dU + dW_{nc}$$
$$dW = dE_k = -dU + dW_{nc}$$
$$\rightarrow d\left(E_k + U\right) = dW_{nc}$$

Variazione dell'energia meccanica (non totale, visto che ci sono altre forze in gioco, oltre a quelle conservative) = lavoro forze n.c.

Energia totale iniziale (cinetica/potenziale/mix delle due)→Energia meccanica + lavoro forze non conservative

Forze n.c. dissipative: di natura statistica
Legate all'esistenza di processi irreversibili in senso termodinamico

Forze n.c. non dissipative: p es forza magnetica, non derivabile da un potenziale anche se non compie lavoro

Esempio: Attrito viscoso
Non conservazione dell'energia meccanica:

$$E = E_k + U$$

Non costante se ci sono forze non conservative

$$dW_{nc} = F_{nc} dx$$

$$\rightarrow dE = dW_{nc}$$

$$F_{nc} = -kv \rightarrow dW_{nc} = -kvdx = -kv\frac{dx}{dt}dt = -kv^2 dt$$

$$\rightarrow dE = -kv^2 dt$$

Caduta in aria a basse velocita' ($v_0 = 0$):

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \rightarrow v^2(t) = \left(\frac{mg}{k}\right)^2 \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = -kv^2 = -k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} \underset{t\rightarrow\infty}{\approx} -\frac{m^2 g^2}{k}$$

Rateo di perdita di energia: costante a tempi lunghi

Dissipazione termica: processo irreversibile

Osservazione:

$$v \simeq v_L \to E_K \simeq \frac{1}{2} m v_L^2 = \text{cost}$$

$$\to \frac{dE}{dt} \simeq \frac{dU}{dt}$$

Trasformazione di en. potenziale gravitazionale in calore