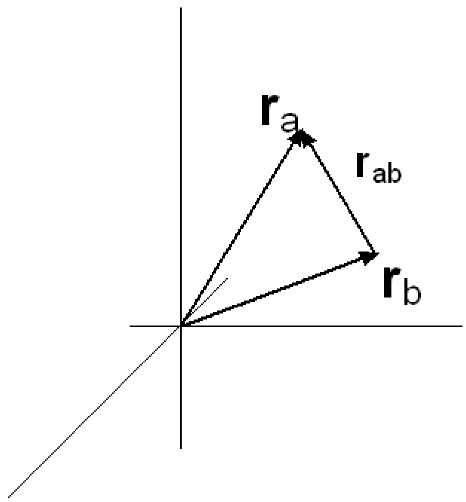
Moti relativi

Necessita' (ovvia) di un sistema di riferimento per la descrizione del moto, p es (ma non sempre necessariamente) terna di assi cartesiani



$$\boldsymbol{r}_{BA} = \boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B$$

$$\boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = -\boldsymbol{r}_{BA}$$

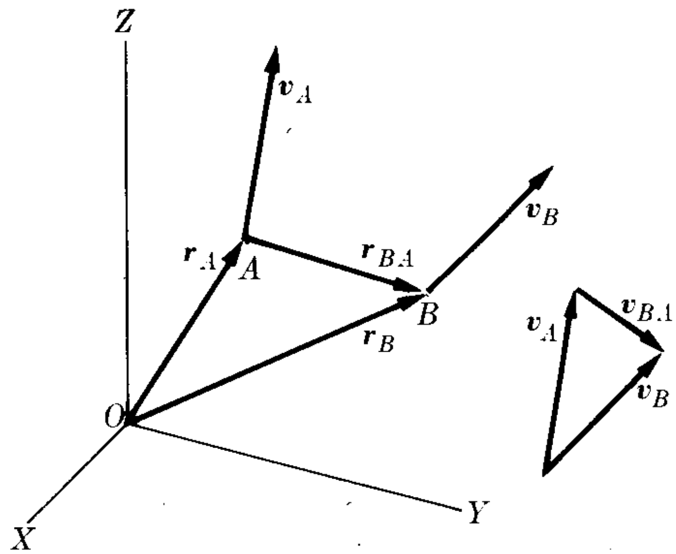
$$\rightarrow \boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt}, \boldsymbol{v}_B = \frac{d\boldsymbol{r}_B}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} - \frac{d\boldsymbol{r}_B}{dt} = \boldsymbol{V}_{BA} = -\boldsymbol{V}_{AB} = -\frac{d\boldsymbol{r}_{AB}}{dt}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{V}_{BA} = \boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B = -\boldsymbol{V}_{AB}$$

$\boldsymbol{V}_{BA}$ Vel. di A relativa a B

$\boldsymbol{V}_{AB}$ Vel. di B relativa a A



$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt}, \boldsymbol{v}_B = \frac{d\boldsymbol{r}_B}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{v}_{BA}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} - \frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt} = \boldsymbol{a}_{BA} = -\boldsymbol{a}_{AB} = -\frac{d\boldsymbol{v}_{AB}}{dt}$$

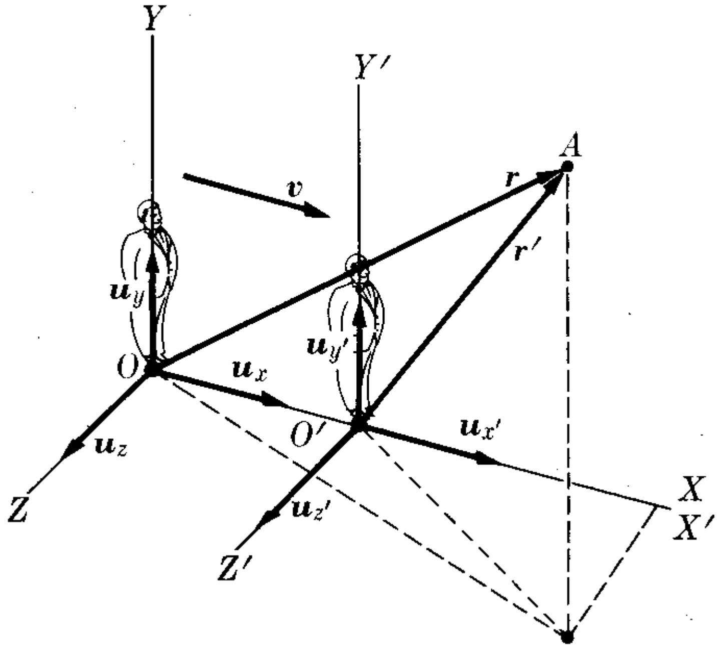
$$\rightarrow \boldsymbol{a}_{BA} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_A}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{r}_B}{dt^2} = -\boldsymbol{a}_{AB}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_B = -\boldsymbol{a}_{AB}$$

$\boldsymbol{a}_{BA}$ Acc. di A relativa a B

$\boldsymbol{a}_{AB}$ Acc. di B relativa a A

SR in moto relativo rettilineo e uniforme



Origini O,O' coincidenti per $t=0$; assi paralleli (Non il caso piu' generale: ma rotazione *fissa* degli assi $X'Y'Z'$ rispetto XYZ irrilevante)

Moto relativo rettilineo e uniforme: velocita' relativa $\boldsymbol{v}$, p es lungo asse x

Posizione relativa delle origini:

$$\overline{OO'} = \boldsymbol{v}t, \quad \boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{i}}$$

Posizione di un punto materiale A:

$$\boldsymbol{r}_A'(t) = \boldsymbol{r}_A(t) - \boldsymbol{v}t$$

$$\rightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) - vt \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = z(t) \end{cases}$$

In realta', sottointesa, anche:

$$t' = t$$

Apparentemente ovvio e pedantesco, ma....

E' vero?

Risposta: esperimento, non metafisica.

Quindi: Trasformazioni di Galilei

$$\rightarrow \begin{cases} x'(t') = x(t) - vt \\ y'(t') = y(t) \\ z'(t') = z(t) \\ \quad t' = t \end{cases}$$

Valide per basse velocita' $\ll c$

Problema: data la legge di trasformazione delle coordinate, come si trasformano velocita' e accelerazione?

Trasformazione della velocita'

Velocita' in componenti cartesiane:

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\boldsymbol{V}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}'$$

Legge galileiana di composizione delle velocita':

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t \rightarrow \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - \boldsymbol{v}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{v}$$

Per il caso particolare dell'esempio:

$$\begin{cases} V_x' = V_x - v \\ V_y' = V_y \\ V_z' = V_z \end{cases}$$

Trasformazione dell'accelerazione

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$$

$$\begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases}$$

Quindi: i due osservatori misurano la stessa accelerazione

Le accelerazioni sono invarianti per trasformazioni di Galilei

Principio di Relativita':

Le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i SRI

Osservatori che fanno esperimenti/osservazioni in SR in moto rett+unif rispetto a un SRI traggono le stesse conclusioni

(←famoso passo di Galilei: rinchiudetevi nella stiva di una nave…)

Principio fondato sull'esperienza: impossibile mettere in evidenza sperimentalmente il movimento rett+unif del laboratorio

Questo fissa alcune caratteristiche che le leggi dinamiche devono avere, e il carattere relativo delle velocita': in particolare, l'indipendenza delle leggi della meccnica da velocita' assolute

Quindi esistono infiniti SRI, gli uni in moto rett+unif rispetto agli altri: tutti equivalenti per le leggi dinamiche

SR in moto relativo uniformemente accelerato

Origini O,O' coincidenti per $t=0$; assi paralleli (Non il caso piu' generale: ma rotazione *fissa* degli assi $X'Y'Z'$ rispetto XYZ irrilevante)

Moto relativo rettilineo uniformemente accelerato: accelerazione relativa $\boldsymbol{A}$, p es lungo asse x, vel. relativa = 0 per $t=0$
(Non il caso piu' generale: ma vel. relativa *costante* in aggiunta ad acc. relativa irrilevante agli effetti dell'accelerazione)

Posizione relativa delle origini:

$$\overline{OO'} = \int_0^t \boldsymbol{v}(t)\,dt = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}t^2, \quad \boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{A} = a\hat{\boldsymbol{i}}$$

Velocita' relativa delle origini:

$$\boldsymbol{v}_{\overline{OO'}}(t) = \boldsymbol{A}t, \quad \boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{A} = a\hat{\boldsymbol{i}}$$

Posizione di un punto materiale P:

$$\boldsymbol{r}_P{}'(t) = \boldsymbol{r}_P(t) - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}t^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) - \frac{1}{2}At^2 \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = z(t) \end{cases}$$

Trasformazione di velocita' e accelerazione:

$$\rightarrow \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}t^2 \rightarrow \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - \boldsymbol{A}t$$

$$\rightarrow \boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{A}t$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} - \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{A}$$

$$\begin{cases} a_x{}' = a_x - A \\ a_y{}' = a_y \\ a_z{}' = a_z \end{cases}$$

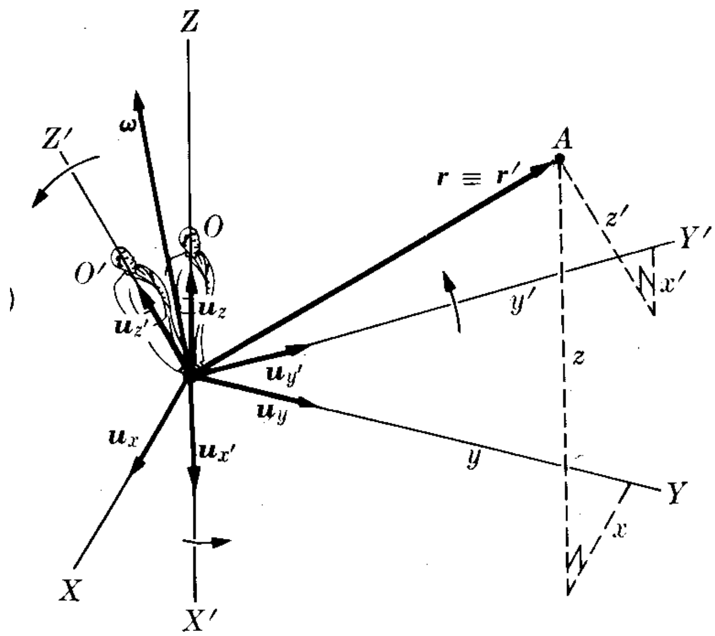
$\rightarrow$ Accelerazione del punto diversa per i due SR

Problema concettuale non banale:
le accelerazioni sono legate alle forze; *cosa da' origine alle accelerazioni extra che si osservano nei SR non inerziali?*

SR in moto relativo di rotazione

$\boldsymbol{\omega} =$ Vel. angolare di S' rispetto a S, costante

$\rightarrow -\boldsymbol{\omega} =$ Vel. angolare di S rispetto a S'



Uno stesso vettore ha *componenti diverse* rispetto a *terne diverse*

→S e S' descrivono la posizione del punto mobile con lo *stesso* vettore, ma la velocita' e l'accelerazione con vettori *diversi.*

Cerchiamo la relazione fra velocita' e accelerazione in S e in S'

Posizione:

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}} = x'\hat{\boldsymbol{i}}' + y'\hat{\boldsymbol{j}}' + z'\hat{\boldsymbol{k}}'$$

Significato: diverse componenti dello stesso vettore

Velocita' del punto in S, *usando le componenti di* $\boldsymbol{r}$ *in* S:

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\boldsymbol{k}} \quad \text{vel. del punto in S}$$

Velocita' del punto in S', *usando le componenti di* $\boldsymbol{r}$ *in* S':

$$\boldsymbol{V}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}' \quad \text{vel. del punto in S}'$$

Significato: due diversi vettori, scomposti ognuno secondo i suoi versori 'naturali', costanti risp. in S e in S'

Velocita' del punto in S, *usando le componenti di* $\boldsymbol{r}$ *in* S':

$$\boldsymbol{V} = \frac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}' + x'\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} + z'\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt}$$

Ultimi 3 termini presenti perche' $\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ mobili in S

Versore mobile: vettore unitario in rotazione con $\boldsymbol{\omega}$ costante

$$\rightarrow \frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{i}}', \frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{j}}', \frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{k}}'$$

Dimostrazione: caso semplice in cui $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{k}}' \equiv \omega \hat{\boldsymbol{k}}$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{\boldsymbol{i}}' = \cos\omega t \hat{\boldsymbol{i}} + \sin\omega t \hat{\boldsymbol{j}} \\ \hat{\boldsymbol{j}}' = -\sin\omega t \hat{\boldsymbol{i}} + \cos\omega t \hat{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$ versori rotanti nel piano xy

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} = -\omega\sin\omega t \hat{\boldsymbol{i}} + \omega\cos\omega t \hat{\boldsymbol{j}} = -\omega\left(\sin\omega t \hat{\boldsymbol{i}} - \cos\omega t \hat{\boldsymbol{j}}\right) = \omega \hat{\boldsymbol{j}}' \\ \dfrac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} = -\omega\cos\omega t \hat{\boldsymbol{i}} - \omega\sin\omega t \hat{\boldsymbol{j}} = -\omega\left(\cos\omega t \hat{\boldsymbol{i}} + \sin\omega t \hat{\boldsymbol{j}}\right) = -\omega \hat{\boldsymbol{i}}' \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} = \omega \hat{\boldsymbol{j}}' = \omega \hat{\boldsymbol{k}}' \times \hat{\boldsymbol{i}}' = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{i}}' \\ \dfrac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} = -\omega \hat{\boldsymbol{i}}' = -\omega \hat{\boldsymbol{j}}' \times \hat{\boldsymbol{k}}' = -\hat{\boldsymbol{j}}' \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{j}}' \end{cases}$$

Risultato si estende a $\boldsymbol{\omega}$ in direzione qualsiasi

$$\rightarrow x' \frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} + y' \frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} + z' \frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt} = x' \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{i}}' + y' \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{j}}' + z' \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{k}}'$$

$$\rightarrow x' \frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt} + y' \frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} + z' \frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \left(x' \hat{\boldsymbol{i}}' + y' \hat{\boldsymbol{j}}' + z' \hat{\boldsymbol{k}}'\right) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Es. punto fermo in S' viene visto ruotare con vel. angolare $\boldsymbol{\omega}$, quindi con vel. lineare $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ in S

Accelerazione

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}_{\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}$$

$\boldsymbol{V}' = v_x' \hat{\boldsymbol{i}}' + v_y' \hat{\boldsymbol{j}}' + v_z' \hat{\boldsymbol{k}}'$ componenti e versori in S'

Come prima, rispetto a S evolvono nel tempo

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x'}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}' + \frac{dv_y'}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}' + \frac{dv_z'}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}'}_{=\boldsymbol{a}'} + \underbrace{v_x' \overbrace{\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}'}{dt}}^{=\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{i}}'} + v_y' \frac{d\hat{\boldsymbol{j}}'}{dt} + v_z' \frac{d\hat{\boldsymbol{k}}'}{dt}}_{=\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}'}$$

$$\rightarrow \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}'$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}_{\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right)$$

2° termine: *acc. di Coriolis*, presente solo se il punto si muove in S'

3° termine: *acc. centrifuga*, presente solo se il punto e' spostato rispetto all'asse di rotazione

Es: punto istantaneamente fermo in S', con acc. propria ***a'*** , ha in S anche acc. centripeta dovuta alla rotazione: $\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$